

Acest dosar este prezentat exclusiv pentru informare.
Stimate cititor!

Daca DVS doriti sa copiat acest dosar, el urmeaza a fi inlaturat fara intirziere, imediat dupa ce ati facut cunostinta cu continutul lui.

Copiind si pastrind dosarul in cauza,
DVS va asumati toata responsabilitatea
in conformitate cu legislatia in vigoare.

Toate drepturile de autor asupra dosarului dat
se pastreaza dupa detinatorul de drept.

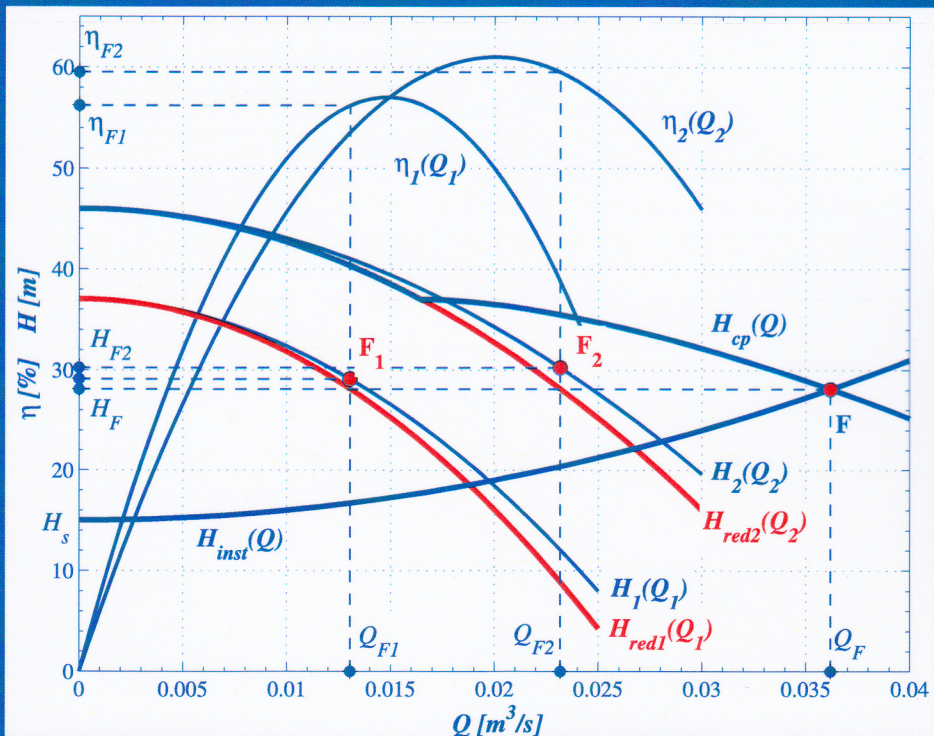
Orice utilizare in scopuri comerciale sau alte
scopuri, cu exceptia utilizarii in scopuri de informare
prealabila este interzisa.

Publicarea acestui document nu atrage dupa sine nici
un fel de cistig comercial.

Insa astfel de documente contribuie rapid la ridicarea
profesionalismului si spiritualitatii
cititorilor si serveste drept reclama a editiilor de
hirtie a acestor documente.

Andrei-Mugur GEORGESCU
Sanda-Carmen GEORGESCU
Costin Ioan COȘOIU
Nicolae Ioan ALBOIU
Dan HLEVCA

PROBLEME DE MAȘINI HIDRAULICE



**ANDREI-MUGUR GEORGESCU • SANDA-CARMEN GEORGESCU •
COSTIN IOAN COȘOIU • NICOLAE IOAN ALBOIU • DAN HLEVCA**

PROBLEME DE MAȘINI HIDRAULICE

Andrei-Mugur GEORGESCU

Sanda-Carmen GEORGESCU

Costin Ioan COȘOIU

Nicolae Ioan ALBOIU

Dan HLEVCA

**PROBLEME DE
MAȘINI HIDRAULICE**

Editura Printech

2014

Editura PRINTECH

Tipar executat la:

S.C. ANDOR TIPO S.R.L. – Editura PRINTECH

Site: www.andortipo.ro; www.printech.ro

Adresa: str. Tunari nr.11, Sector 2, București

Tel./Fax: 021.211.37.12; 021.212.49.51

E-mail: comenzi@andortipo.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Probleme de mașini hidraulice / Andrei-Mugur Georgescu,

Sanda-Carmen Georgescu, Costin Ioan Coșoiu, ... –

București : Printech, 2014

Bibliogr.

ISBN 978-606-23-0148-4

I. Georgescu, Andrei-Mugur

II. Georgescu, Sanda-Carmen

III. Coșoiu, Costin Ioan

621.22

Referenți științifici:

Prof. dr. ing. Mircea DEGERATU

Universitatea Tehnică de Construcții București

Prof. dr. ing. Liviu Valer HAȘEGAN

Universitatea Tehnică de Construcții București

© Copyright 2014

Toate drepturile prezentei ediții sunt rezervate editurii și autorilor. Nicio parte din această lucrare nu poate fi reprodusă, stocată sau transmisă indiferent prin ce formă, fără acordul prealabil scris al autorilor.

CUPRINS

	<i>Pagina</i>
PREFAȚĂ _____	3
1. BREVIAR TEORETIC _____	5
1.1. Mărimi specifice sistemelor hidraulice _____	5
1.1.1. Pierderi de sarcină hidraulică _____	5
1.1.2. Instalația de pompare _____	10
1.2. Funcționarea turbopompelor în sisteme hidraulice _____	15
1.2.1. Curbele caracteristice ale turbopompelor _____	15
1.2.2. Reglarea funcționării turbopompelor cu turație variabilă _____	19
1.2.3. Cuplarea turbopompelor în serie _____	24
1.2.4. Cuplarea turbopompelor în paralel _____	27
2. PROBLEME SIMPLE REZOLVATE _____	32
2.1. Punctul de funcționare energetică al turbopompei _____	32
Problema 2.1.1. Punctul de funcționare energetică al unei pompe axiale _____	32
Problema 2.1.2. Punctul de funcționare energetică al unei pompe centrifuge _____	34
Problema 2.1.3. Modificarea punctului de funcționare energetică al unei pompe centrifuge prin închiderea vanei de pe conducta de refulare _____	37
2.2. Punctul de funcționare cavitațională al turbopompei _____	40
Problema 2.2.1. Punctul de funcționare cavitațională în cazul unei instalații de pompare cu contrapresiune la aspirație _____	40
Problema 2.2.2. Punctul de funcționare cavitațională în cazul unei instalații de pompare cu înălțime geodezică de aspirație pozitivă _____	45
2.3. Funcționarea unei turbopompe cu turație variabilă _____	49
Problema 2.3.1. Determinarea randamentului la care funcționează o pompă centrifugă acționată cu turație diferită de turația nominală _____	49
Problema 2.3.2. Determinarea turației cu care trebuie acționată o pompă centrifugă, astfel încât aceasta să asigure debitul cerut (sau înălțimea de pompare cerută) _____	53
2.4. Funcționarea turbopompelor cuplate în serie _____	56

Problema 2.4.1. Funcționarea pompelor centrifuge identice cuplate în serie ____	56
Problema 2.4.2. Funcționarea pompelor centrifuge diferite cuplate în serie ____	60
2.5. Funcționarea turbopompelor cuplate în paralel _____	63
Problema 2.5.1. Funcționarea pompelor centrifuge identice cuplate în paralel (calcul grafo-analitic) _____	63
Problema 2.5.2. Funcționarea pompelor centrifuge identice cuplate în paralel (calcul analitic) _____	67
Problema 2.5.3. Funcționarea pompelor centrifuge diferite cuplate în paralel (calcul grafo-analitic) _____	71
Problema 2.5.4. Funcționarea pompelor centrifuge diferite cuplate în paralel (calcul numeric) _____	76
3. PROBLEME COMPLEXE REZOLVATE _____	82
Problema 3.1. Funcționarea energetică și cavitațională a turbopompelor cuplate în paralel, care aspiră individual din același rezervor _____	82
Problema 3.2. Funcționarea cu turație variabilă a turbopompelor cuplate în paralel, astfel încât în instalație să fie asigurat debitul cerut, sau înălțimea de pompare cerută (calcul grafo-analitic) _____	89
Problema 3.3. Funcționarea cu turație variabilă a turbopompelor cuplate în paralel, astfel încât în instalație să fie asigurat debitul cerut, sau înălțimea de pompare cerută (calcul numeric) _____	95
Problema 3.4. Funcționarea energetică a mai multor turbopompe cuplate în paralel, cu multiple noduri de distribuție, respectiv de colectare _____	101
4. PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE _____	110
4.1. Punctul de funcționare energetică al turbopompei _____	110
4.2. Punctul de funcționare cavitațională al turbopompei _____	121
4.3. Funcționarea unei turbopompe cu turație variabilă _____	135
4.4. Funcționarea turbopompelor cuplate în serie _____	148
4.5. Funcționarea turbopompelor cuplate în paralel _____	162
REFERINȚE BIBLIOGRAFICE _____	177

PREFATĂ

Prezenta culegere de *Probleme de Mașini hidraulice* se adresează cu precădere studenților de la Facultatea de Inginerie a Instalațiilor și Facultatea de Hidrotehnică de la Universitatea Tehnică de Construcții București, respectiv studenților de la Facultatea de Energetică a Universității “Politehnica” din București. Această culegere de probleme poate fi însă utilă tuturor studenților care au prevăzute în planurile de învățământ discipline din domeniul Ingineriei Fluidelor, ca de exemplu: *Hidraulică; Mașini hidraulice; Stații de pompare și rețele hidraulice*.

Culegerea de *Probleme de Mașini hidraulice* este structurată în patru părți. Prima parte reprezintă un breviar teoretic, în care sunt reamintite pe scurt noțiunile de bază legate de calculul hidraulic al conductelor și instalațiilor de pompare. Cea de-a doua parte conține probleme simple rezolvate, grupate pe tematici (punctul de funcționare energetică, punctul de funcționare cavitațională, modificarea turației, cuplarea în serie și cuplarea în paralel a turbopompelor). Cea de-a treia parte conține probleme complexe rezolvate, de tipul temelor de casă pe care trebuie să le rezolve studenții de la Facultatea de Energetică, în cadrul disciplinei *Mașini hidraulice* (predate în anul III de studii), respectiv disciplinei *Stații de pompare și rețele hidraulice* (predate în anul IV de studii, la specializarea Hidroenergetică).

În funcție de caz, problemele simple și/sau complexe sunt rezolvate grafo-analitic, analitic, sau numeric (cu ajutorul MATLAB[®] și GNU Octave, o clonă *free software* a MATLAB[®]). Pentru a familiariza cititorul cu aceste metode, au fost realizate comparații între diferitele metode de calcul utilizate pentru rezolvarea aceleiași probleme.

Cea de-a patra parte a cărții conține probleme propuse spre rezolvare, în principal bazate pe problemele pe care trebuie să le rezolve studenții de la Facultatea de Inginerie a Instalațiilor, în cadrul disciplinei *Mașini hidraulice* (predate în anul III de studii). Problemele propuse sunt grupate pe tematicile abordate în cea de-a doua parte a cărții și prezintă o anumită particularitate și anume, aceea că pentru o anumită tematică, rezultatul este unic, deși datele problemelor sunt diferite. Această abordare poate părea stranie, dar numărul mare de lucrări care trebuie corectate într-un interval de timp relativ scurt a fost motorul care a dus la apariția acestui set de probleme. Modul de rezolvare al problemelor propuse se bazează pe considerentele teoretice și soluțiile prezentate în primele două părți ale cărții.

Autorii

1. BREVIAR TEORETIC

1.1. Mărimi specifice sistemelor hidraulice

1.1.1. Pierderi de sarcină hidraulică

Fie conducta circulară, orizontală, de diametru constant D , lungime L și rugozitate absolută a pereților k , schematizată în figura 1.1. Prin conductă curge un fluid cu **debitul volumic** Q .

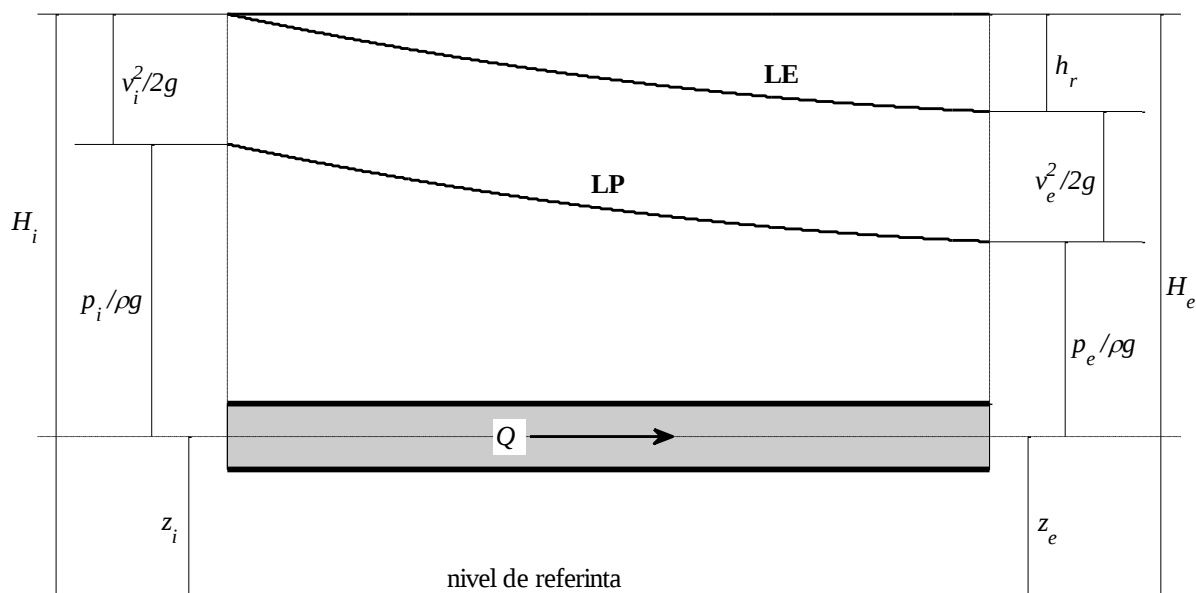


Fig. 1.1. – Reprezentarea schematică a conduitei și a liniilor caracteristice curgerii

Înălțimea piezometrică H_p reprezintă energia potențială medie raportată la greutate, într-o secțiune a conduitei, normală la direcția principală de curgere a fluidului, fiind definită ca:

$$H_p = z + \frac{p}{\rho g}, \quad (1.1)$$

unde z este cota axei conduitei în raport cu un **nivel de referință** ales, p este presiunea la nivelul axei conduitei, ρ este densitatea fluidului și g este accelerația gravitațională. Termenul $p/\rho g$ definește **nivelul manometric** în secțiunea respectivă. **Sarcina hidrodinamică** H este suma dintre înălțimea piezometrică și energia cinetică raportată la greutate $v^2/2g$, anume:

$$H = H_p + \frac{v^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}, \quad (1.2)$$

unde v este **viteza medie** în secțiunea considerată, definită ca raport între debitul volumic și aria A aferentă secțiunii de curgere (secțiune circulară de diametru D):

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2}. \quad (1.3)$$

Ținând seama de relația (1.3), **termenul cinetic** $v^2/2g$ se poate scrie în funcție de **modulul cinetic** definit prin relația $M_c = 0,0826/D^4$ (un modul fictiv de rezistență hidraulică), astfel:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{16}{\pi^2 2g} \frac{1}{D^4} Q^2 = 0,0826 \frac{1}{D^4} Q^2 = M_c Q^2, \quad (1.4)$$

Termenul $16/(\pi^2 2g) = 0,0826$ din relația (1.4) este introdus în formule ca o constantă, fără a i se menționa unitatea de măsură: s^2/m . Termenul cinetic se scrie în general: $\alpha v^2/2g$, unde α este **coeficientul lui Coriolis**. Deoarece acest coeficient este aproximativ egal cu unitatea în cazul **regimului de curgere turbulent**, cum este cel din sistemele hidraulice studiate în această lucrare, în cele ce urmează, coeficientul lui Coriolis nu va mai fi inserat în formulele de calcul.

Pentru o conductă (inclusiv pentru cea din figura 1.1), **legea energiilor** [8]¹, [14], [16], sau **relația lui Bernoulli generalizată**, între secțiunea de intrare i și cea de ieșire e se scrie:

$$H_i = H_e + h_r, \quad (1.5)$$

adică

$$z_i + \frac{p_i}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} = z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} + h_r, \quad (1.6)$$

unde h_r este **pierdere de sarcină hidraulică totală** între cele două secțiuni ale conductei.

Pentru un **tronson de conductă cu diametru constant**, ca cel din figura 1.1, **viteza este constantă**, deci: $v_i = v_e$. Pentru un astfel de caz, legea energiilor (1.6) se poate exprima în funcție de înălțimile piezometrice, astfel:

$$H_{p_i} = H_{p_e} + h_r. \quad (1.7)$$

Linia piezometrică, simbolizată **LP** (vezi figura 1.1) este descrisă de variația înălțimii piezometrice între secțiunea de intrare i și cea de ieșire e . **Linia energetică**, simbolizată **LE** (vezi figura 1.1) este descrisă de variația sarcinii hidrodinamice între secțiunile i și e . Diferența

¹ conceptul B.2: Legea energiilor în curentul unidimensional de fluid

dintre nivelul energetic la intrare și nivelul energetic la ieșire este egală cu **pierderea de sarcină hidraulică**, care crește între secțiunea de intrare și cea de ieșire proporțional cu pătratul debitului.

Pierderea de sarcină hidraulică totală reprezintă [8]², [14], [16] raportul dintre fluxul de energie mecanică disipată între cele două secțiuni ale conductei și produsul $\rho g Q$. Pierderea de sarcină hidraulică totală h_r se determină prin însumarea **pierderilor de sarcină hidraulică uniform distribuite** h_d și **pierderilor de sarcină hidraulică locale** h_l . Pentru o conductă circulară, de diametru D și lungime L (inclusiv pentru cea din figura 1.1), de-a lungul căreia există un număr de n neuniformități ce perturbă curgerea (ca de exemplu: schimbări de direcție, vane, sau alte elemente perturbatoare), **pierderea de sarcină hidraulică totală** se scrie:

$$h_r = h_d + \sum_{j=1}^n h_{l_j}. \quad (1.8)$$

Din punct de vedere fizic, mecanismul de disipare al energiei diferă la cele două tipuri de pierderi de sarcină hidraulică. Pierderile de sarcină hidraulică uniform distribuite (numite și **pierderi de sarcină hidraulică liniare**) se datorează vâscozității fluidului [8]³, [14], [16]. Una dintre relațiile de definiție a pierderilor de sarcină hidraulică uniform distribuite este **relația Darcy-Weissbach**:

$$h_d = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}, \quad (1.9)$$

unde λ este **coeficientul de pierdere de sarcină hidraulică uniform distribuită**, denumit și **coeficientul lui Darcy**. În funcție de regimul de curgere, coeficientul lui Darcy depinde de rugozitatea relativă k/D și/sau de numărul Reynolds Re , definit astfel:

$$Re = \frac{v D}{\nu} = \frac{4 Q}{\pi D \nu}, \quad (1.10)$$

unde ν este vâscozitatea cinematică a fluidului. În cazul mișcării turbulente, coeficientul lui Darcy se determină cu diferite relații, explicite sau implicite [8]⁴, [12]⁵, [14], [16], în funcție de tipul de turbulență (definit de numărul Reynolds Re) și de tipul de rugozitate aferent pereților conductei (definit prin rugozitatea relativă k/D).

Dacă se ține seama de relația (1.3) de definiție a vitezei medii, **relația Darcy-Weissbach** (1.9) se poate scrie în funcție de debit sub forma:

² conceptul B.2: Pierderi de sarcină hidraulică

³ conceptul B.2: Pierderi de sarcină hidraulică uniform distribuite

⁴ conceptele B.2: Regimuri de curgere în conducte; Formula Colebrook-White; Diagrama lui Moody

⁵ conceptul B.2: Relații de calcul pentru coeficientul lui Darcy

$$h_d = \lambda \frac{L}{D^5} \frac{16}{\pi^2 2g} Q^2 = 0,0826 \lambda \frac{L}{D^5} Q^2 = M_d Q^2, \quad (1.11)$$

unde $M_d = 0,0826 \lambda L/D^5$ este **modulul de rezistență hidraulică distribuită**. Similar cu cazul modulului cinetic, termenul $16/(\pi^2 2g) = 0,0826$ din relația (1.11) este introdus în formule ca o constantă, fără a i se menționa unitatea de măsură: s^2/m .

Pierderile de sarcină hidraulică locale [8]⁶, [14], [16] sunt pierderi suplimentare datorate neuniformitatilor existente pe traseul de curgere al fluidelor (schimbări de direcție, modificări ale secțiunii de curgere, ramificații, organe de închidere ale circuitelor hidraulice etc).

Pierdere de sarcină hidraulică locală h_l este definită prin relația:

$$h_l = \zeta \frac{v^2}{2g}, \quad (1.12)$$

care se poate scrie și în funcție de debit:

$$h_l = 0,0826 \frac{\zeta}{D^4} Q^2 = M_l Q^2, \quad (1.13)$$

unde ζ este **coeficientul de pierdere de sarcină hidraulică locală** și $M_l = 0,0826 \zeta/D^4$ este **modulul de rezistență hidraulică locală**. Valorile coeficientului de pierdere de sarcină hidraulică locală ζ sunt date sub formă de grafice, tabele sau formule, în funcție de tipul singularității (neuniformității), precum și de caracteristicile geometrice ale conductei.

Ținând seama de relațiile pentru pierdere de sarcină hidraulică uniform distribuită (1.11) și pentru pierdere de sarcină hidraulică locală (1.13), **pierdere de sarcină hidraulică totală** (1.8) se poate scrie la rândul său în funcție de debit:

$$h_r = \left(M_d + \sum_{j=1}^n M_{l_j} \right) Q^2 = M Q^2, \quad (1.14)$$

unde $M = (M_d + \sum M_l)$ este **modulul de rezistență hidraulică** al conductei. Pentru simplificarea scrierii, în calculul conductelor, pierdere de sarcină hidraulică totală se exprimă preponderent sub forma $h_r = M Q^2$. În formulele de calcul ale pierderilor de sarcină hidraulică, toate celelalte mărimi trebuie introduse cu valorile corespunzătoare în unități de măsură ale S.I., astfel încât rezultatul să fie corect din punct de vedere dimensional (pierdere de sarcină hidraulică se măsoară în metri).

Cu notația din relația (1.14), legea energiilor (1.5) se poate scrie:

⁶ conceptul B.2: Pierderi de sarcină hidraulică locale

$$H_i = H_e + MQ^2, \quad (1.15)$$

iar pentru cazul **tronsonului de conductă cu diametru constant**, ca cel din figura 1.1, legea energiilor (1.7) devine:

$$H_{p_i} = H_{p_e} + MQ^2. \quad (1.16)$$

Admițând că valoarea modulului de rezistență hidraulică M este constantă, relația (1.16) se poate reprezenta grafic, rezultând **parabola $H_{p_i} = H_{p_e}(Q)$ din primul cadran** al graficului din figura 1.2. Există sisteme hidraulice, de exemplu **rețele inelare de conducte**, în care **sensul de curgere pe tronsoanele de conductă se poate schimba** în funcție de regimul de funcționare aferent sistemului. Astfel, considerând un **tronson de conductă** cu diametru constant, pentru care **nu se cunoaște apriori sensul debitului** pe tronson, legea energiilor (1.7) între cele două noduri de capăt, i și e , ale tronsonului, se poate scrie:

$$H_{p_i} = H_{p_e} + MQ|Q|. \quad (1.17)$$

Relația (1.17) se poate reprezenta grafic atât pentru valori pozitive, cât și pentru valori negative ale debitului, rezultând **curba $H_{p_i} = H_{p_e}(Q)$ în formă de S din primele două cadrane** ale graficului din figura 1.2.

Se subliniază faptul că modulul de rezistență hidraulică M nu este de fapt constant pe întreaga plajă de variație a debitului, deoarece în componența lui M , definit prin (1.14), intră și modulul de rezistență hidraulică distribuită M_d (1.11), care depinde de coeficientul lui Darcy λ . La rândul său, coeficientul lui Darcy depinde de regimul de curgere definit de numărul Reynolds (1.10), adică depinde de debitul Q pentru regimurile laminar, turbulent neted și turbulent mixt. **Numai pentru regimul turbulent rugos λ nu depinde de Re , ci doar de rugozitatea relativă**, deci pentru acest unic regim de curgere, **modulul M este într-adevăr constant**. Pentru simplificarea calculelor, se va considera în continuare că valoarea lui M rămâne constantă pe întreaga plajă de variație a debitului.

Din **punct de vedere hidraulic**, sistemele hidraulice sub presiune pot fi alcătuite din [8]⁷:

- **conducte lungi** – conducte la care pierderile de sarcină hidraulică locale h_l , precum și termenii cinetici de la intrarea și ieșirea din conducte, se neglijează în raport cu pierderile de sarcină hidraulică uniform distribuite: $h_l \ll h_d$. În cazul **conductelor lungi din punct de vedere hidraulic**, pierderea de sarcină hidraulică totală este aproximată prin relația:

⁷ conceptul B.2: Modele de calcul ale sistemelor hidraulice sub presiune

$h_r \cong h_d$. În această categorie se încadrează conductele al căror raport între lungime și diametru are valori semnificative: $L/D > 200$;

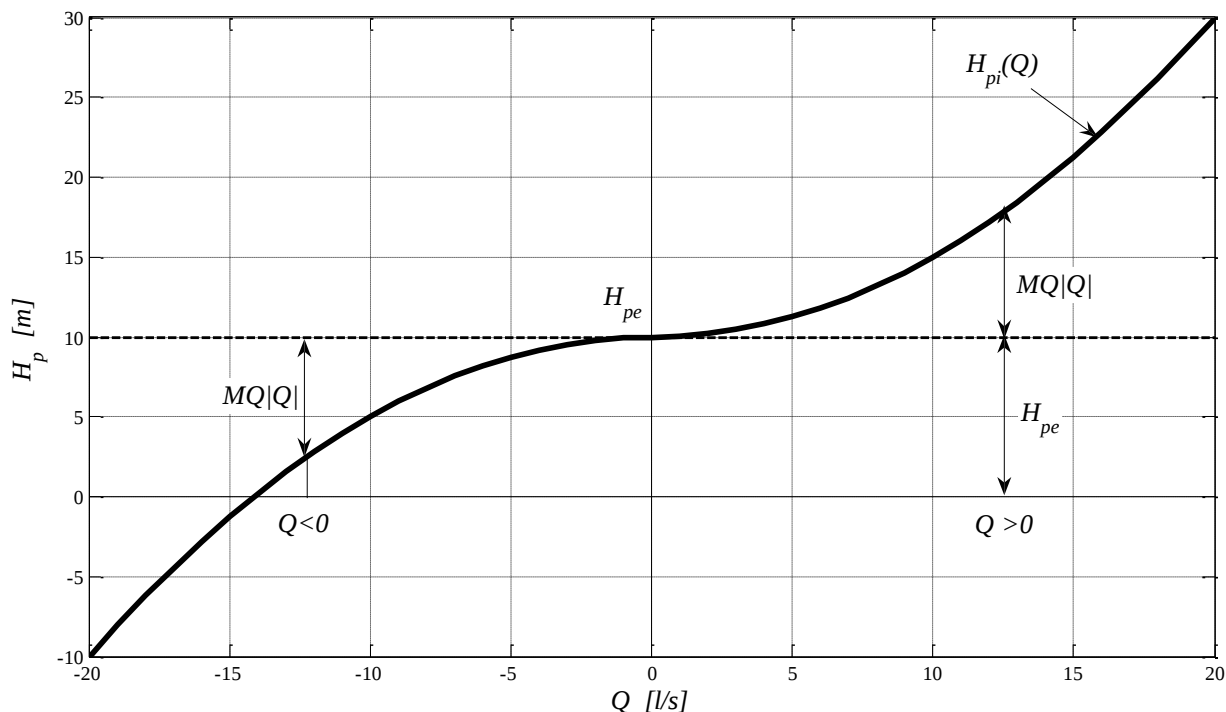


Fig. 1.2. – Reprezentarea grafică a legii energiei pentru o conductă cu diametru constant

- **conducte scurte** – conducte la care pierderile de sarcină hidraulică locale h_l se iau în considerare alături de pierderile de sarcină hidraulică uniform distribuite h_d , ambele tipuri de pierderi de sarcină având același ordin de mărime. În această categorie se încadrează conductele al căror raport între lungime și diametru are valori reduse [14], [16]⁸: $L/D \leq 200$.

1.1.2. Instalația de pompare

Fie o turbopompă încadrată într-un sistem hidraulic simplu (figura 1.3), alcătuit din următoarele componente: un rezervor de aspirație R_a a cărei suprafață liberă este la o cotă z_i mai ridicată decât cota de referință z_a a aspirației pompei, o conductă de aspirație între rezervor și pompă (la intrarea în această conductă există, în general, un sorb/filtru), o pompă centrifugă P , urmată de conducta de refulare, pe care se află montate o clapetă anti-retur (clapetă de sens, care împiedică curgerea lichidului către pompă) și o vană, respectiv un

⁸ se poate admite și $L/D > (200, \dots, 400)$

rezervor de refulare R_r a cărei suprafață liberă se află la o cotă $z_e > z_i$. Se consideră cazul unor rezervoare închise, cu nivel constant, iar la suprafața liberă a rezervoarelor, presiunea este diferită de presiunea atmosferică. Funcționarea turbopompelor în sistemele hidraulice este determinată de parametrii fundamentali reprezentați în figurile 1.3 și 1.4, anume [14], [16]:

- **Debitul pompat Q** – reprezintă volumul de fluid care trece prin secțiunea de refulare a pompei în unitatea de timp;
- **Înălțimea de pompare H** – reprezintă energia raportată la greutate pe care o cedează pompa curentului de fluid. Această energie specifică este definită ca diferență între sarcina hidrodinamică a fluidului la refulare (punctul r) și sarcina hidrodinamică a fluidului la aspirație (punctul a), astfel:

$$H = \left(z_r + \frac{p_r}{\rho g} + \frac{v_r^2}{2g} \right) - \left(z_a + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{v_a^2}{2g} \right). \quad (1.18)$$

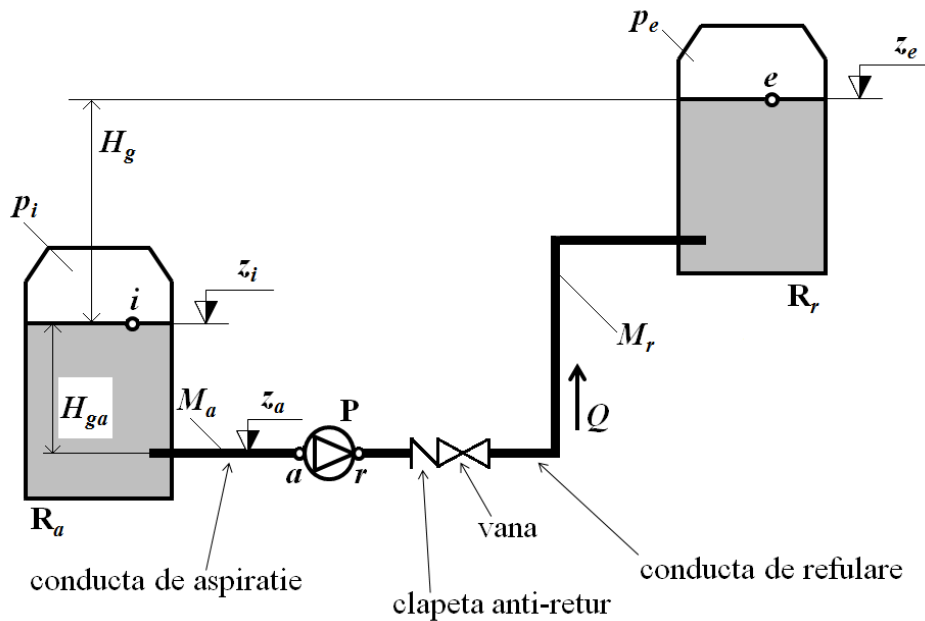


Fig. 1.3. – Schema instalației de pompare

După cum se observă din figurile 1.3 și 1.4, între punctele a și r , **linia energetică LE** prezintă un **salt de înălțime** egală cu H ;

- **Înălțimea geodezică de aspirație a pompei H_{ga}** – reprezintă diferența dintre cota secțiunii de referință z_a de la aspirația pompei și cota secțiunii de intrare în sistem z_i :

$$H_{ga} = z_a - z_i; \quad (1.19)$$

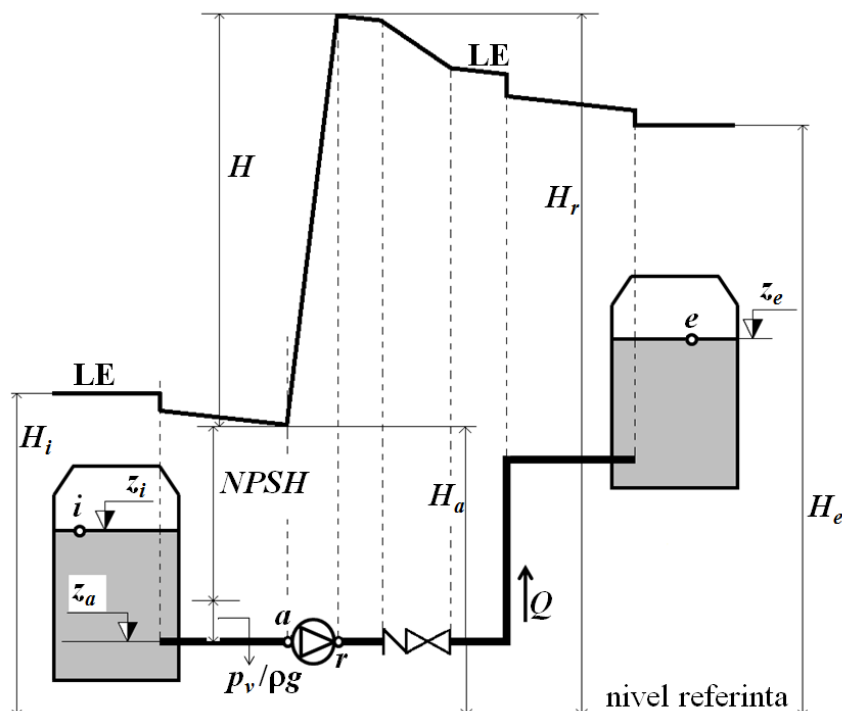


Fig. 1.4. – Linia energetică LE și parametrii fundamentali ai instalației de pompare

- **Înălțimea geodezică** H_g – reprezintă diferența de înălțime între planele orizontale determinate de cota secțiunii de ieșire din sistem (în aval de pompă) și cota secțiunii de intrare în sistemul hidraulic (în amonte de pompă):

$$H_g = z_e - z_i; \quad (1.20)$$

- **Înălțimea statică** H_s – reprezintă diferența dintre sarcina hidrodinamică în secțiunea de ieșire H_e și sarcina hidrodinamică în secțiunea de intrare H_i :

$$H_s = H_e - H_i = \frac{v_e^2 - v_i^2}{2g} + \frac{p_e - p_i}{\rho g} + H_g. \quad (1.21)$$

Pentru **sisteme hidraulice care conțin rezervoare**, viteza lichidului în rezervor este considerată nulă, fiind neglijabilă în raport cu viteza din conductele sistemului. În cazul unei instalații de pompare cu **două rezervoare**, ca cea din figura 1.3, diferența dintre termenii cinetici de la ieșire și intrare tinde la zero, iar relația (1.21) se reduce la diferența dintre înălțimile piezometrice din cele două secțiuni:

$$H_s = H_{pe} - H_{pi} = \frac{p_e - p_i}{\rho g} + H_g. \quad (1.22)$$

Mai mult, dacă presiunile pe suprafețele libere ale celor două rezervoare sunt egale ($p_i = p_e$), cum este, de exemplu, **cazul rezervoarelor deschise la presiunea atmosferică**, atunci relația (1.22) se simplifică și mai mult: $H_s = H_g$.

- **Sarcina pompei la mersul în gol** H_0 – reprezintă sarcina pompei la debit nul, $Q = 0$, atunci când vana din aval de pompă este închisă (pompele centrifuge sunt pornite ”în gol”, adică cu vana de pe refulare închisă, în scopul protejării motorului electric de antrenare al pompei);

- **Sarcina pozitivă netă la aspirație**⁹ $NPSH$ – este un parametru de cavitație (măsurat în metri) foarte important pentru pompe; reprezintă energia suplimentară raportată la greutate, **necesară (cerută) la aspirația pompei**, peste nivelul piezometric dat de presiunea de vaporizare a fluidului $p_v/\rho g$, astfel încât în pompă să nu apară cavitația (vezi figura 1.4). Pentru **funcționarea fără cavitație**, este necesar să fie îndeplinită condiția:

$$NPSH < NPSH_{inst}, \quad (1.23)$$

unde $NPSH_{inst}$ este **sarcina pozitivă netă la aspirație disponibilă în instalație**;

- **Puterea hidraulică** (puterea utilă a pompei) P_h – reprezintă energia totală cedată curentului de fluid în unitatea de timp (puterea transmisă apei). Ea se calculează în funcție de debitul vehiculat Q și de înălțimea de pompare H cu relația:

$$P_h = \rho g Q H ; \quad (1.24)$$

- **Puterea pompei** (puterea absorbită) P_p – reprezintă energia totală consumată de pompă în unitatea de timp pentru a ceda curentului de fluid puterea P_h ; mai exact, este **puterea mecanică transmisă la arborele pompei** (puterea consumată), astfel încât la refulare să fie obținută puterea hidraulică (puterea utilă) și să fie acoperite toate disipațiile de putere din pompă (datorate pierderilor de sarcină hidraulică din rotor, pierderilor mecanice din lagăre și din sistemul de etanșare a arborelui și pierderilor volumice). Puterea pompei este definită prin relația:

$$P_p = \frac{P_h}{\eta_p} = \frac{\rho g Q H}{\eta_p} \quad (1.25)$$

unde η_p este **randamentul pompei**;

⁹ În limba engleză, $NPSH$ reprezintă abrevierea cuvintelor **Net Positive Suction Head**.

• **Puterea agregatului de pompare** P – reprezintă **puterea electrică consumată** pentru pompare, adică puterea absorbită de **motorul electric de antrenare al pompei**, pentru a putea furniza curentului de fluid puterea utilă (puterea hidraulică):

$$P = \frac{P_p}{\eta_c \eta_{me}} = \frac{P_h}{\eta_p \eta_c \eta_{me}} = \frac{P_h}{\eta} = \frac{\rho g Q H}{\eta}, \quad (1.26)$$

unde η_c reprezintă randamentul cuplajului dintre pompă și motorul de antrenare, η_{me} reprezintă randamentul motorului electric de antrenare al pompei, η_p este randamentul pompei, iar η este **randamentul agregatului de pompare**;

• **Momentul la arbore** M – reprezintă cuplul motor care trebuie furnizat la axul pompei pentru a putea asigura puterea absorbită:

$$M = P_p / \omega, \quad (1.27)$$

unde ω este viteza unghiulară a rotorului pompei;

• **Randamentul pompei** η_p – reprezintă raportul dintre puterea hidraulică P_h și puterea consumată P_p (transmisă la arborele pompei), conform relației (1.25). Randamentul pompei definește calitatea transferului de energie din interiorul pompei și se calculează ca produs între randamentul hidraulic η_h , randamentul mecanic η_m și randamentul volumic η_v :

$$\eta_p = \eta_h \eta_m \eta_v; \quad (1.28)$$

• **Randamentul agregatului de pompare** η – reprezintă raportul dintre puterea hidraulică P_h și puterea agregatului de pompare P (puterea electrică consumată pentru pompare),

$$\eta = \eta_p \eta_c \eta_{me}; \quad (1.29)$$

• **Turația** n [rot/s] – reprezintă numărul de rotații efectuate de rotorul pompei în unitatea de timp. În **aplicațiile industriale**, turația este exprimată frecvent în [rot/min], caz în care turația este definită prin numărul de rotații ale turbopompei pe durata unui minut;

• **Viteza unghiulară** ω – este definită în funcție de turația n în [rot/s], prin relația:

$$\omega = 2\pi n. \quad (1.30)$$

Dacă turația este dată în [rot/min], viteza unghiulară este definită astfel: $\omega = 2\pi n/60 = \pi n/30$.

Pentru sistemul hidraulic din figurile 1.3 și 1.4, sistem care include și o turbopompă, **legea energiilor** [8]¹⁰, [14], [16] se scrie sub forma:

$$H_i + H = H_e + h_r, \quad (1.31)$$

¹⁰ conceptul B.2: Legea energiilor în curentul unidimensional de fluid

unde $h_r = MQ^2$ reprezintă suma pierderilor de sarcină hidraulică pe traseul conductelor de aspirație și de refulare, al căror **modul global de rezistență hidraulică** M este calculat ca sumă a modulelor de rezistență hidraulică din figura 1.3: $M = (M_a + M_r)$. **Din legea energiilor (1.31), se obține înălțimea de pompare H :**

$$H = (H_e - H_i) + h_r. \quad (1.32)$$

Membrul drept al relației (1.32) reprezintă înălțimea de pompare necesară în instalație, H_{inst} , pentru a vehicula debitul Q . Ținând seama de relația (1.21), **caracteristica instalației** este exprimată ca sumă între înălțimea statică H_s și pierderile de sarcină hidraulică totale din sistem:

$$H_{inst} = H_s + MQ^2. \quad (1.33)$$

1.2. Funcționarea turbopompelor în sisteme hidraulice

1.2.1. Curbele caracteristice ale turbopompelor

Considerând debitul Q și turația n ca variabile independente, se pot trasa **suprafețe de variație tridimensionale** pentru celelalte mărimi caracteristice ale unei turbopompe, anume: înălțimea de pompare H , puterea P , randamentul η și sarcina pozitivă netă la aspirație $NPSH$. Cele mai uzuale **reprezentări grafice 3D aferente turbopompelor** sunt enumerate mai jos:

- suprafața caracteristică energetică: $H = H(Q, n)$;
- suprafața caracteristică a puterii: $P = P(Q, n)$;
- suprafața caracteristică de randament: $\eta = \eta(Q, n)$;
- suprafața caracteristică de cavitație (sau cavitațională): $NPSH = NPSH(Q, n)$.

Datorită dificultăților de citire a diferitelor valori de pe astfel de suprafețe caracteristice, în mod uzual sunt trasate **curbele caracteristice ale turbopompelor**, care se obțin prin intersectarea suprafețelor caracteristice cu plane de turație constantă ($n = const.$). Rezultă astfel următoarele **curbe caracteristice ale turbopompelor**:

- **caracteristica energetică:** $H = H(Q)$;
- **caracteristica de putere:** $P = P(Q)$;
- **caracteristica de randament:** $\eta = \eta(Q)$;
- **caracteristica de cavitație (sau curba cavitațională):** $NPSH = NPSH(Q)$.

Aceste 4 tipuri de curbe constituie împreună **curbele caracteristice de exploatare** ale unei turbopompe. În general, curbele caracteristice ale pompelor sunt **puse la dispoziția utilizatorilor de pompe de către fabricanții acestora**, sub formă grafică sau sub formă tabelară. De exemplu, în figura 1.5 sunt prezentate cele 4 curbe caracteristice ale unei pompe centrifuge (curbele au fost trasate la aceeași turație, $n = 1450 \text{ rot/min}$).

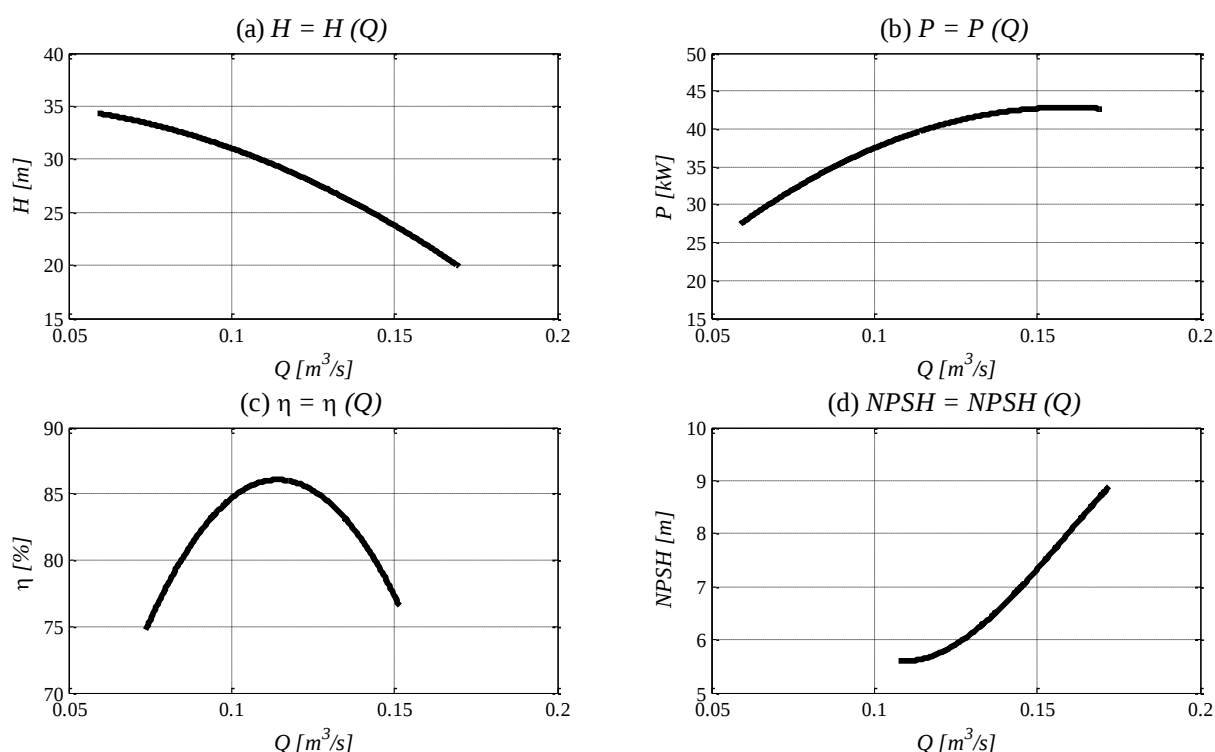


Fig. 1.5. – Curbele caracteristice ale unei turbopompe centrifuge

Caracteristica instalației (figura 1.6) este reprezentarea grafică a variației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definite de relația (1.33). Această curbă corespunde energiei raportate la greutate (H_{inst}), care ar trebui să fie furnizată instalației, pentru ca prin aceasta să fie vehiculat debitul Q . Pe de altă parte, **caracteristica energetică a pompei** $H = H(Q)$ corespunde energiei raportate la greutate (H), pe care o poate furniza pompa respectivă, atunci când vehiculează debitul Q .

Funcționarea unei turbopompe într-o anumită instalație se realizează atunci când există un punct, în care pentru același debit Q , **energia specifică furnizată de pompă este egală cu energia specifică necesară instalației pentru funcționare**. Adică, pompa cu caracteristica energetică $H = H(Q)$ funcționează în instalația cu caracteristica $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, în **punctul**

de intersecție a celor două curbe reprezentate în planul $\{Q, H\}$. Acest punct este denumit **punct de funcționare energetică** și este notat **F** în figura 1.6.

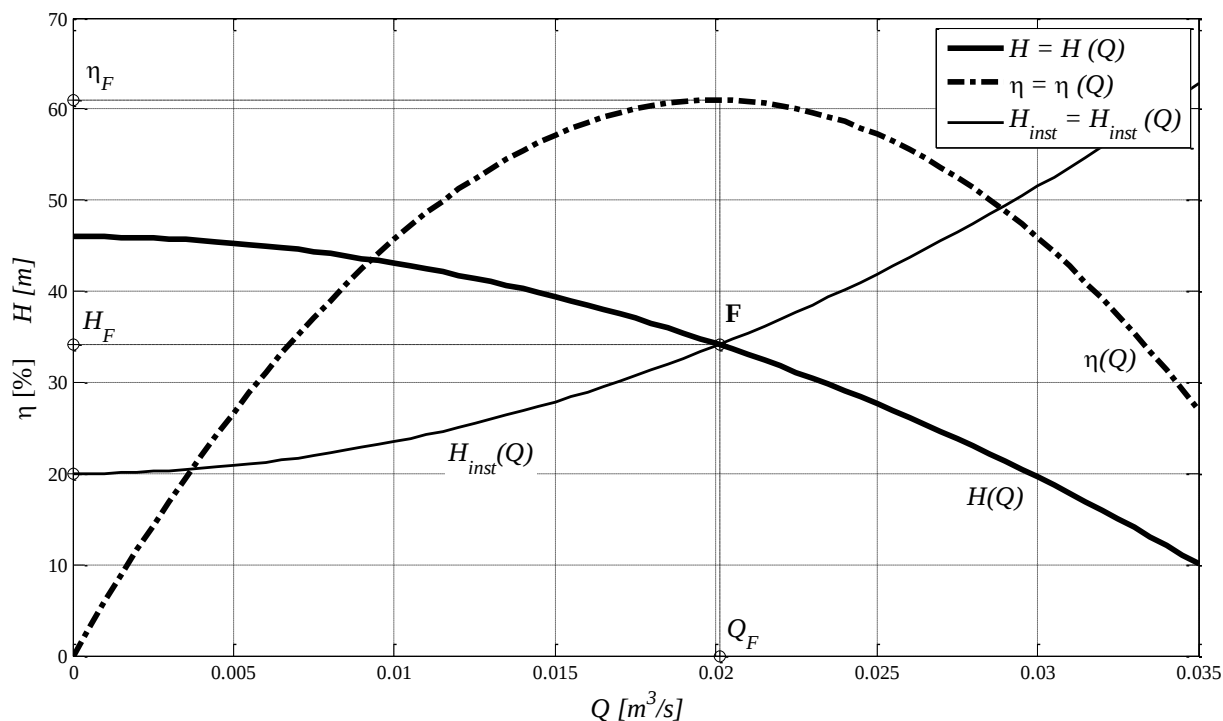


Fig. 1.6. – Punctul de funcționare energetică *F*

În acest **punct F** de coordonate (Q_F, H_F) , debitul de lichid vehiculat de către pompă este egal cu debitul care tranzitează sistemul hidraulic, iar înălțimea de pompare este egală cu energia specifică necesară în instalație. Pentru debitul corespunzător punctului de funcționare, se citește pe caracteristica de randament $\eta = \eta(Q)$ valoarea randamentului η_F , apoi se poate calcula **puterea necesară** funcționării pompei în punctul **F** (puterea electrică consumată pentru pompare):

$$P_F = \frac{\rho g Q_F H_F}{\eta_F}. \quad (1.34)$$

Sarcina pozitivă netă la aspirație disponibilă în instalație $NPSH_{inst}$ reprezintă diferența dintre energia specifică absolută în secțiunea de aspirație și energia specifică potențială calculată cu presiunea de vaporizare din acea secțiune (unde **presiunile sunt exprimate în scară absolută**). Utilizând notațiile din figura 1.4, din **legea energiei** scrisă între secțiunea de intrare (punctul *i*) și secțiunea de aspirație a pompei (punctul *a*), rezultă că $NPSH_{inst}$ **depinde**

de caracteristicile constructive ale traseului de aspirație al instalației, fiind definit prin relația:

$$NPSH_{inst} = \frac{p_{absi} - p_v}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} - H_{ga} - h_{ri-a}, \quad (1.35)$$

unde $h_{ri-a} = M_a Q^2$ sunt **pierderile de sarcină hidraulică totale pe conducta de aspirație** (în figura 1.3, s-a notat cu M_a modulul de rezistență hidraulică al acestei conducte). Ținând seama de condiția (1.23) impusă pentru **funcționarea fără cavitație** ($NPSH < NPSH_{inst}$), rezultă că valoarea $NPSH_{inst}$ trebuie să fie cât mai mare. Creșterea valorii $NPSH_{inst}$ poate fi realizată prin [14], [16]: mărirea presiunii la intrarea în sistem, alegerea unei soluții de montare a pompei cu înălțime geodezică de aspirație cât mai mică (inclusiv negativă: **contrapresiune la aspirație**), respectiv reducerea pierderilor de sarcină hidraulică pe conducta de aspirație.

Reprezentarea grafică a dependenței $NPSH_{inst} = NPSH_{inst}(Q)$ se numește **curbă cavitațională a instalației**. Punctul de intersecție dintre această caracteristică și **curba cavitațională a pompei** $NPSH = NPSH(Q)$ se numește **punct de funcționare cavitațională**, notat **C** în figura 1.7.

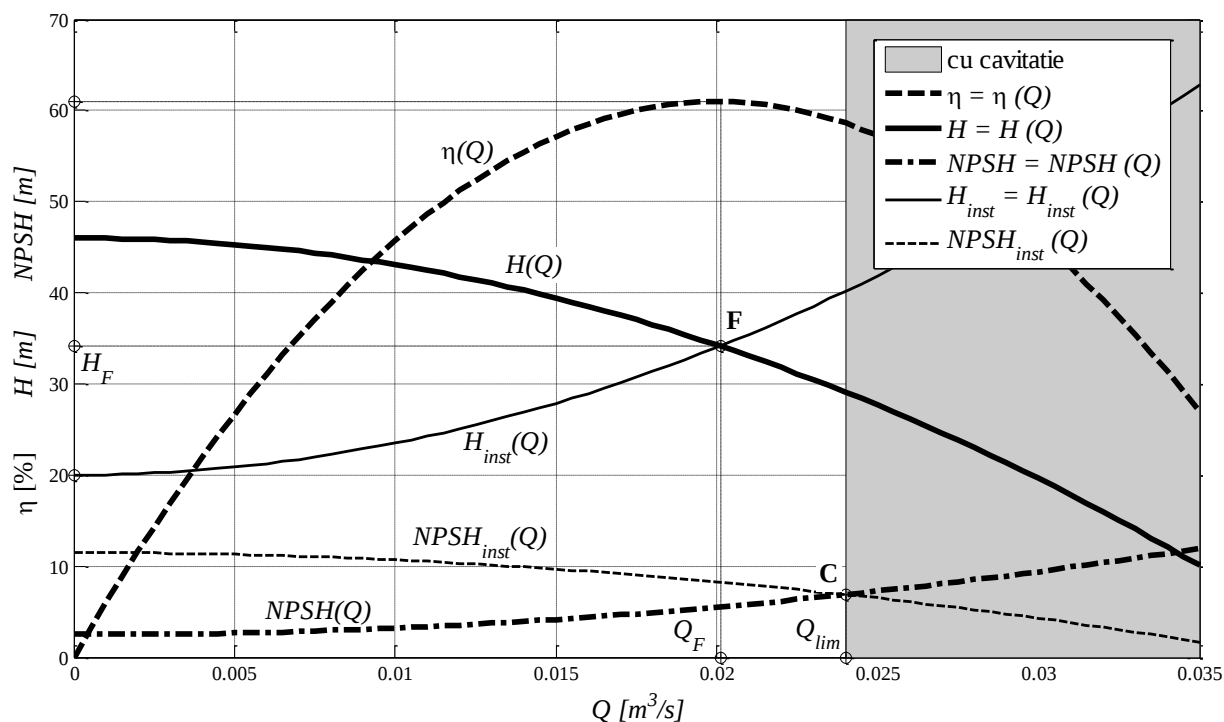


Fig. 1.7. – Punctul de funcționare cavitațională C, la dreapta punctului de funcționare energetică F

În zona situată **la stânga punctului C**, funcționarea pompei poate fi realizată fără cavitație, curba cavitațională a instalației fiind deasupra curbei cavitaționale a pompei, condiția (1.23) fiind astfel îndeplinită. În zona situată **la dreapta punctului C**, curba $NPSH_{inst}(Q)$ este sub curba $NPSH(Q)$ și corespunde **funcționării cu cavitație** (zona colorată în gri în figura 1.7).

Pentru ca pompa să **funcționeze fără cavitație la aspirație**, este necesar ca **punctul de funcționare energetică F să fie situat la stânga punctului de funcționare cavitațională C**; această condiție semnifică faptul că debitul Q_F trebuie să fie **mai mic decât debitul limită** Q_{lim} aferent punctului C, adică:

$$Q_F < Q_{lim}. \quad (1.36)$$

În situația în care se obține egalitatea valorilor acestor debite, $Q_F = Q_{lim}$, sau dacă Q_F se află în apropierea debitului limită, anume: $Q_F \in [0,97Q_{lim}; 1,03Q_{lim}]$, variația fiind de $\pm 3\%$ din Q_{lim} , atunci pompa **funcționează la limita apariției cavitației**, denumită **incipiență cavitațională**. Pentru valori $Q_F > Q_{lim}$, pompa **funcționează cu cavitație dezvoltată în zona de aspirație**.

1.2.2. Reglarea funcționării turbopompelor cu turație variabilă

Fie instalația de pompare schematizată în figura 1.3. Vom considera în acest paragraf că pompa centrifugă din acea instalație **funcționează cu turație variabilă** (turația putând fi reglată cu un **convertizor de frecvență**). În figura 1.8 este exemplificată reglarea funcționării acestei pompe în cazul **modificării turației** n , între o valoare minimă n_{min} și o valoare maximă n_{max} : $n \in [n_{min}; n_{max}]$.

Pentru fiecare turație n , pompa are o anumită curbă caracteristică energetică $H = H(Q)$, după cum s-a arătat în paragraful 1.2.1. **Caracteristica energetică a pompei**, variabilă în funcție de turația n considerată ca parametru al funcției $H = H(Q, n)$, intersectează **caracteristica fixă a instalației** $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ de-a lungul unei curbe de variație, delimitată în figura 1.8 de punctele de funcționare $F_1(Q_{max}, H_{max})$ și $F_2(Q_{min}, H_{min})$; această curbă de variație este locul geometric al tuturor punctelor de funcționare ale pompei la diferite valori ale turației.

Fabricantul pompei pune la dispoziție **exclusiv curbele caracteristice la turația nominală** n_0 , de exemplu $H_0 = H_0(Q_0)$ și $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$.

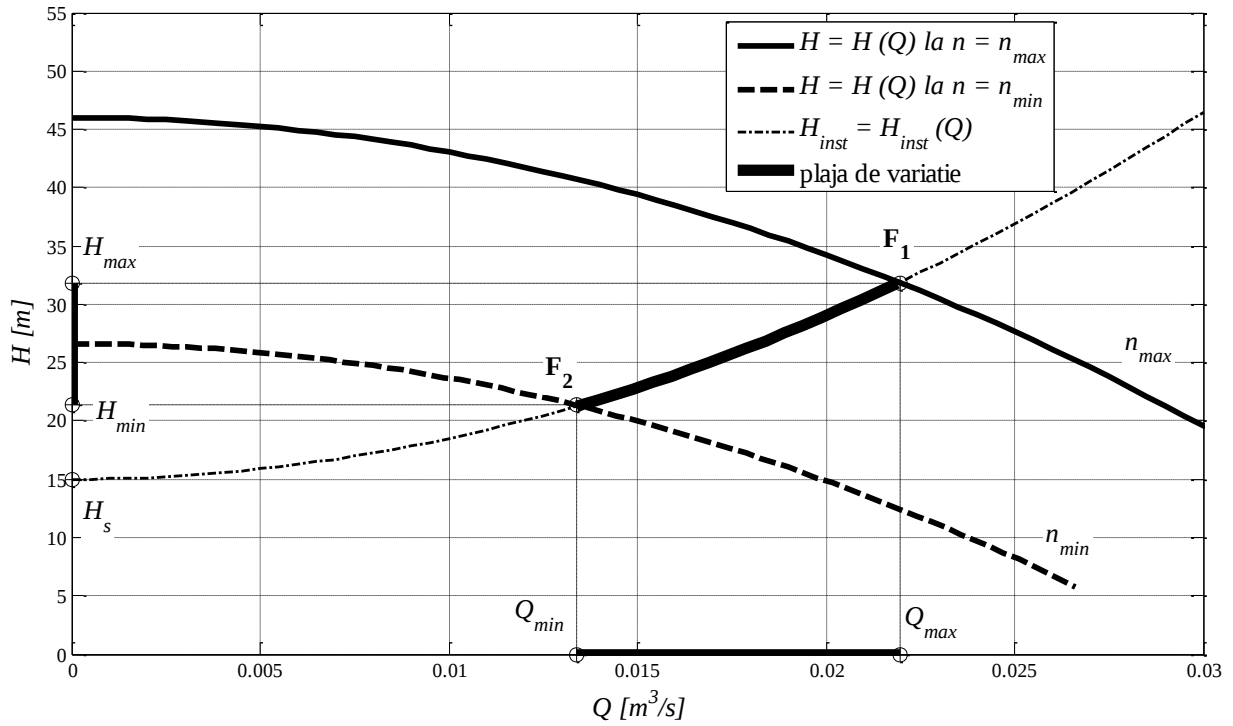


Fig. 1.8. – Reglarea funcționării pompei în cazul modificării turației

Din **criteriile de similitudine ale turbopompelor** [14], [16], rezultă că pentru aceeași pompă care funcționează cu turații diferite, de exemplu cu n_0 și cu $n \neq n_0$, **raportul debitelor** este:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{n}{n_0}, \quad (1.37)$$

iar **raportul înălțimilor de pompare** este:

$$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{n}{n_0} \right)^2. \quad (1.38)$$

Plecând de la un număr de m perechi de valori $\{Q_{0j}, H_{0j}\}$ cunoscute la turația nominală n_0 , unde $j = 1 \div m$, cu ajutorul relațiilor (1.37) și (1.38), pot fi obținute perechile de valori $\{Q_j, H_j\}$ la altă turație n , unde $n \neq n_0$, perechi de valori care pot fi apoi trasate grafic sub forma: $H = H(Q)$.

Punctul de funcționare energetică **F** al unei pompe la turația n , unde $n \neq n_0$, este situat la intersecția dintre caracteristica energetică $H = H(Q)$ și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$.

În cele ce urmează vor fi discutate două aspecte pe care le presupune **efectuarea reglării punctului de funcționare al pompei prin variația turației** [14], [16]:

① Primul aspect este cel al **determinării randamentului la care funcționează o pompă acționată cu motor cu turație variabilă, în momentul în care turația este diferită de turația nominală n_0** (pentru care sunt furnizate curbele caracteristice ale pompei).

Se consideră **cunoscute** caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ și caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ a pompei funcționând la turația nominală n_0 , caracteristica (fixă) a instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, precum și turația n (unde $n \neq n_0$) la care se dorește determinarea parametrilor de funcționare ai pompei în instalația dată.

În acest caz, prin aplicarea relațiilor de similitudine (1.37) și (1.38), se poate construi caracteristica energetică a pompei funcționând la turația n , plecând de la un număr de m perechi de valori $\{Q_{0j}, H_{0j}\}$, unde $j = 1 \div m$, corespunzătoare turației nominale n_0 , astfel:

$$Q_j = \frac{n}{n_0} Q_{0j}, \quad (1.39)$$

$$H_j = \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 H_{0j}, \quad (1.40)$$

unde s-au notat cu $\{Q_j, H_j\}$ coordonatele punctului de pe caracteristica energetică $H = H(Q)$ corespunzătoare turației n . Cele două curbe caracteristice energetice $H_0 = H_0(Q_0)$ și $H = H(Q)$ sunt trasate în figura 1.9.

După construirea caracteristicii $H = H(Q)$ corespunzătoare turației n , se poate determina **punctul de funcționare energetică F** (figura 1.9), punct de coordonate $\{Q_F, H_F\}$, situat la intersecția acestei curbe cu caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$.

Pentru **determinarea randamentului η_F corespunzător punctului de funcționare energetică F**, trebuie determinat debitul $Q_{Fomolog}$ corespunzător **punctului omolog lui F**, punct notat **F_{omolog}**, situat pe caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ a pompei funcționând la turația nominală n_0 . Utilizând relația de similitudine pentru debite (1.37), se obține:

$$Q_{Fomolog} = \frac{n_0}{n} Q_F. \quad (1.41)$$

Pentru valoarea debitului $Q_{Fomolog}$ calculată cu (1.41), corepunzătoare punctului F_{omolog} , se citește randamentul $\eta_{Fomolog}$ pe caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$, furnizată de fabricantul pompei pentru turația nominală n_0 .

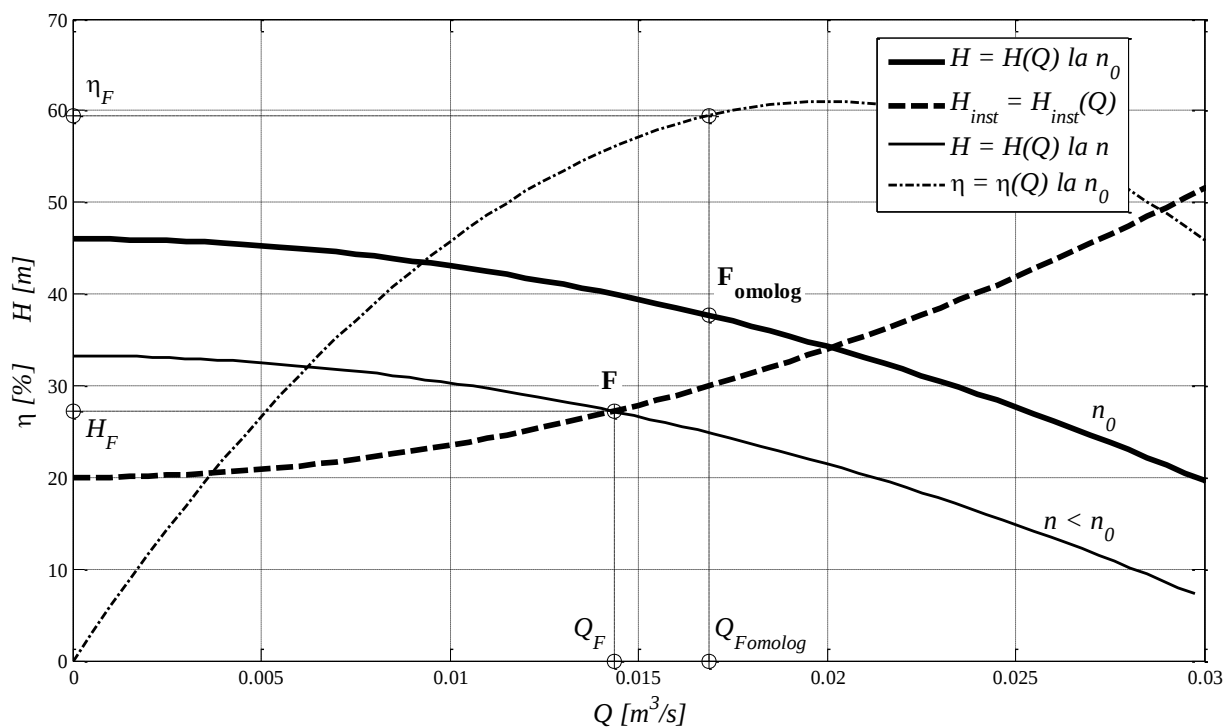


Fig. 1.9. – Determinarea randamentului η_F pentru un punct de funcționare F situat pe curba energetică corespunzătoare unei turații n , diferite de turația nominală n_0

Pentru valori ale turației pompei situate în intervalul $n \in [0,8n_0; n_0]$, plaja de variație a lui n reprezentând **20% din valoarea turației nominale** n_0 , se poate aproxima $\eta_F = \eta_{Fomolog}$.

Pentru $n < 0,8n_0$, randamentul η_F se determină printr-o **relație de corecție**, ca de exemplu cea indicată de Ionescu et al. [27]¹¹:

$$\eta_F = 1 - \left(1 - \eta_{Fomolog}\right) \left(\frac{n_0}{n}\right)^{0,1}. \quad (1.42)$$

② Al doilea aspect este cel legat de **determinarea turației cu care ar trebui acționată o pompă**, astfel încât aceasta să asigure o anumită valoare a debitului, sau o anumită valoare a înălțimii de pompare.

¹¹ Relația (11.4.19) din [27]

Se consideră **cunoscute** caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ și caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ a pompei funcționând la turația nominală n_0 , caracteristica (fixă) a instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, precum și parametrul care trebuie realizat la turația n , unde $n \neq n_0$, adică **fie debitul Q_F , fie înălțimea de pompare H_F** .

În acest caz, se poate determina **punctul de funcționare energetică F** al pompei la turația n necunoscută (figura 1.10), situat fie la intersecția dintre verticala dusă prin Q_F și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ (în cazul în care se impune vehicularea prin instalație a debitului Q_F), fie la intersecția dintre orizontala dusă prin H_F și caracteristica instalației (în cazul în care se impune realizarea în instalație a înălțimii de pompare H_F).

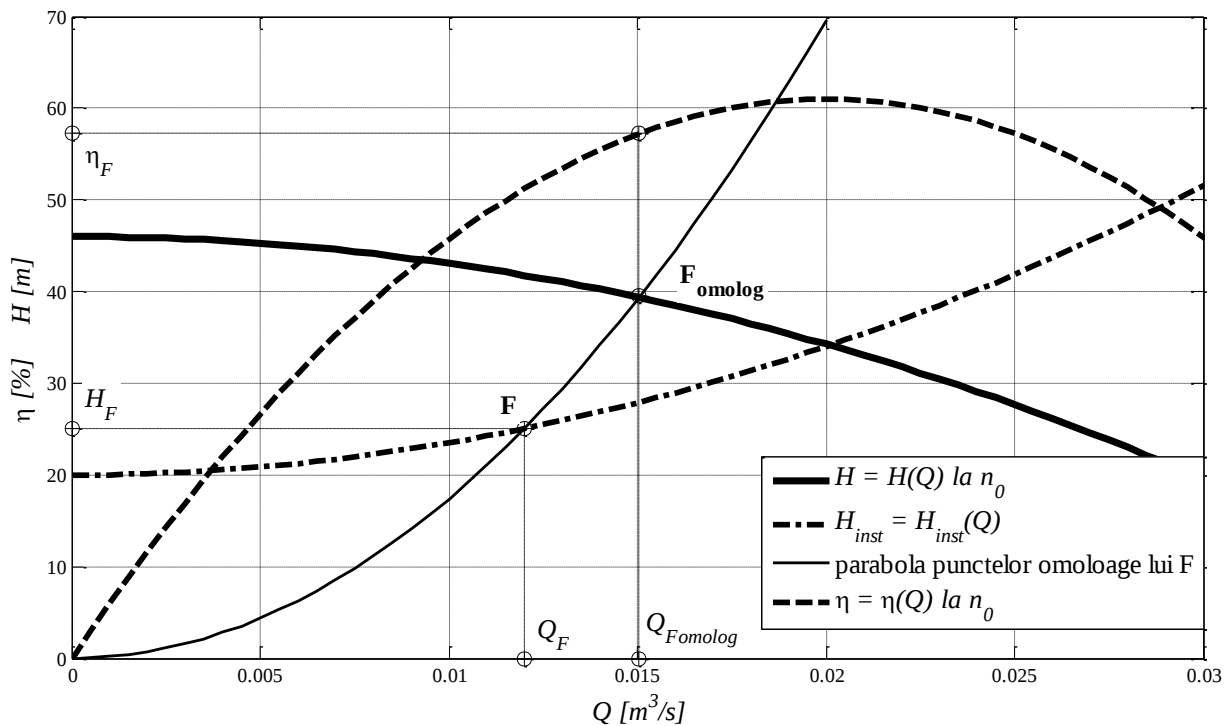


Fig. 1.10. – Determinarea turației n (unde $n \neq n_0$), la care ar trebui să funcționeze pompa, astfel încât prin instalație să se realizeze un anumit parametru (Q_F sau H_F)

Pentru oricare dintre cele două variante posibile prezentate, determinarea punctului de funcționare energetică F (vezi figura 1.10) duce la cunoașterea perechii de valori $\{Q_F, H_F\}$, corespunzătoare turației necunoscute n (unde $n \neq n_0$).

Pentru a putea determina turația n , se scriu relațiile de similitudine (1.37) și (1.38) pentru debite și înălțimi de pompare:

$$\begin{cases} \frac{Q_{omolog}}{Q_F} = \frac{n_0}{n} \\ \frac{H_{omolog}}{H_F} = \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \end{cases} \quad (1.43)$$

Acest sistem de două ecuații cu trei necunoscute $(n, Q_{omolog}, H_{omolog})$ nu poate fi rezolvat direct, în schimb, prin eliminarea raportului turațiilor între cele două ecuații, se obține relația:

$$H_{omolog} = \left(\frac{H_F}{Q_F^2}\right) Q_{omolog}^2 = C Q_{omolog}^2, \quad (1.44)$$

unde constanta $C = H_F / Q_F^2$ este cunoscută. **Parabola** $H_{omolog} = f(Q_{omolog})$ definită prin (1.44) reprezintă **locul geometric al punctelor omoloage lui F**. Se trasează grafic, în figura 1.10, această **parabolă a punctelor omoloage lui F** în planul (Q, H) , iar la intersecția acesteia cu caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ a pompei funcționând la turația nominală n_0 , se obține **punctul omolog** F_{omolog} , în dreptul căruia se citește pe abscisă valoarea debitului $Q_{Fomolog}$. Pentru determinarea turației n , se aplică relația de similitudine (1.37) pentru debite între punctele **F** și **F_{omolog}**, astfel:

$$n = n_0 \frac{Q_F}{Q_{Fomolog}}. \quad (1.45)$$

În continuare, se determină randamentul η_F corespunzător funcționării pompei la turația n în instalația dată (figura 1.10), prin citirea valorii randamentului $\eta_{Fomolog}$ ce corespunde debitului $Q_{Fomolog}$ pe caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$, dată de fabricant pentru turația nominală n_0 . Pentru valori ale turației pompei situate în intervalul $n \in [0,8n_0; n_0]$, se poate aproxima: $\eta_F = \eta_{Fomolog}$. Pentru o modificare a turației n de peste 20% în raport cu n_0 este necesară corectarea valorii η_F față de valoarea $\eta_{Fomolog}$, de exemplu cu relația (1.42).

1.2.3. Cuplarea turbopompelor în serie

În situația în care debitul necesar consumatorilor poate fi asigurat de către o turbopompă, însă înălțimea de pompare este insuficientă, se recurge la **cuplarea pompelor în serie**. În general,

se preferă înlocuirea pompelor înseriate cu **pompe multietajate**. Există însă situații, în care conducta de refulare este foarte lungă și se utilizează cuplarea în serie a pompelor, amplasate la distanțe mari una de cealaltă, în scopul **repompării** (măririi succesive a presiunii de pe conducta de refulare).

În figura 1.11 este prezentată schema unei instalații hidraulice alimentată de **două pompe diferite, P_1 și P_2 , cuplate în serie**, caracteristicile energetice, respectiv de randament ale pompelor fiind [14], [16]: $H_1 = H_1(Q)$, $H_2 = H_2(Q)$, $\eta_1 = \eta_1(Q)$ și $\eta_2 = \eta_2(Q)$.

Instalația este compusă dintr-o conductă de aspirație (amonte de aspirația a_1 a pompei P_1), al cărei modul de rezistență hidraulică este M_1 , un tronson de conductă între cele două pompe înseriate (între punctele r_1 și a_2), al cărei modul de rezistență M_2 include și coeficientul de pierdere de sarcină hidraulică locală în vana montată pe tronson, respectiv o conductă de refulare (aval de refularea r_2 a pompei P_2), al cărei modul de rezistență hidraulică M_3 include și coeficienții de pierdere de sarcină hidraulică locală în clapeta anti-retur și vana din aval de pompa P_2 .

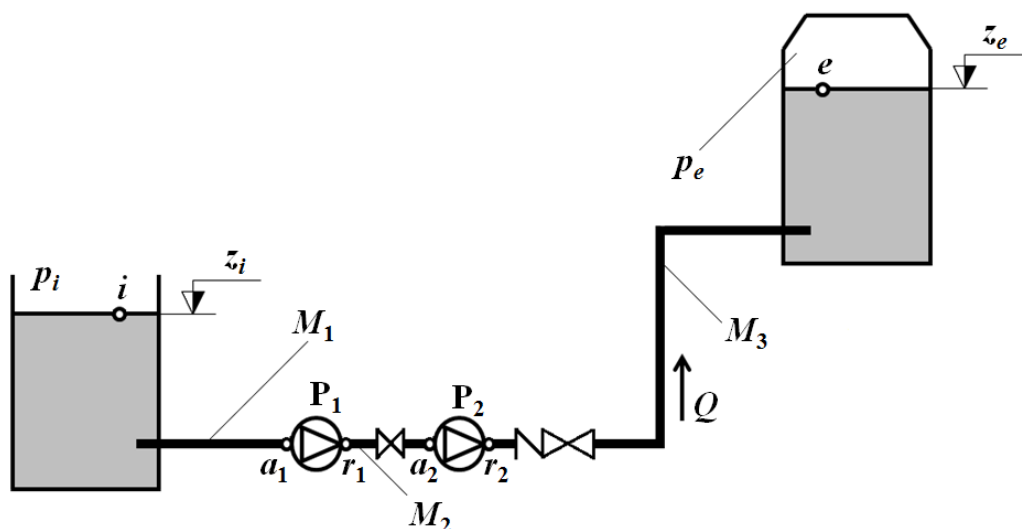


Fig. 1.11. – Instalație hidraulică alimentată de două pompe cuplate în serie

Legea energiilor între intrarea i și ieșirea e din sistemul hidraulic se scrie:

$$H_i + H_1 + H_2 = H_e + h_r, \quad (1.46)$$

unde H_1 și H_2 sunt înălțimile de pompare ale celor două pompe înseriate, iar h_r sunt pierderile de sarcină hidraulică totale din sistem, exprimate cu relația:

$h_r = (M_1 + M_2 + M_3)Q^2 = MQ^2$. Explicitând sarcinile hidrodinamice H_i , respectiv H_e (cu

vitezele v_i și v_e neglijabile) și utilizând relația (1.22) de definiție a înălțimii statice H_s , **legea energilor între intrarea și ieșirea din sistemul hidraulic** se scrie sub forma:

$$H_1 + H_2 = H_s + h_r. \quad (1.47)$$

Membrul drept al relației (1.47) reprezintă **caracteristica instalației**: $H_{inst} = H_s + h_r$. Cu alte cuvinte, **pentru cuplarea în serie a pompelor rezultă următorul sistem de ecuații**:

$$\begin{cases} Q = Q_1 = Q_2 \\ H_1 + H_2 = H_{inst} \end{cases}, \quad (1.48)$$

unde H_{inst} reprezintă energia raportată la greutate, necesară în instalație pentru ca prin aceasta să fie vehiculat debitul Q . Se urmărește obținerea unei curbe similare, care să reprezinte energia raportată la greutate pe care o poate furniza **ansamblul celor două pompe cuplate în serie**. Pentru aceasta, pornind de la caracteristicile energetice ale pompelor, $H_1 = H_1(Q)$ și $H_2 = H_2(Q)$, la **aceeași valoare a debitului ($Q = const.$)**, se adună valorile înălțimilor de pompare pe care le realizează pompele. Se obține astfel curba:

$$H_{cs} = H_{cs}(Q) = H_1(Q) + H_2(Q), \quad (1.49)$$

care reprezintă **sarcina ansamblului de pompe înseriate**.

Punctul de funcționare energetică al ansamblului este notat F și se obține la intersecția dintre **caracteristica instalației** $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ și **caracteristica energetică a ansamblului de pompe înseriate** $H_{cs} = H_{cs}(Q)$, definită prin (1.49). În punctul F (figura 1.12), **debitul pompat** are valoarea Q_F , iar **înălțimea de pompare asigurată de cuplarea în serie a pompelor** are valoarea $H_F = H_{cs}(Q_F)$.

Debitul Q_F tranzitează fiecare pompă, deci la intersecția dintre caracteristica energetică a fiecărei pompe $H_j = H_j(Q)$, cu $j \in \{1; 2\}$ și verticala $Q = Q_F$, se obțin **punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe montate în serie**, anume punctul F_1 pentru prima pompă și punctul F_2 pentru cea de-a doua pompă (figura 1.12). **Înălțimile de pompare asigurate de fiecare dintre cele două pompe** au valorile: $H_{F1} = H_1(Q_F)$, respectiv $H_{F2} = H_2(Q_F)$.

Pe caracteristicile de randament ale pompelor, se citesc valorile **randamentului corespunzător funcționării fiecărei pompe**, anume: $\eta_{F1} = \eta_1(Q_F)$ și $\eta_{F2} = \eta_2(Q_F)$.

Puterea electrică consumată de fiecare pompă se calculează apoi cu relația:

$$P_{F_j} = \frac{\rho g Q_F H_{F_j}}{\eta_{F_j}}, \text{ unde } j \in \{1; 2\}. \quad (1.50)$$

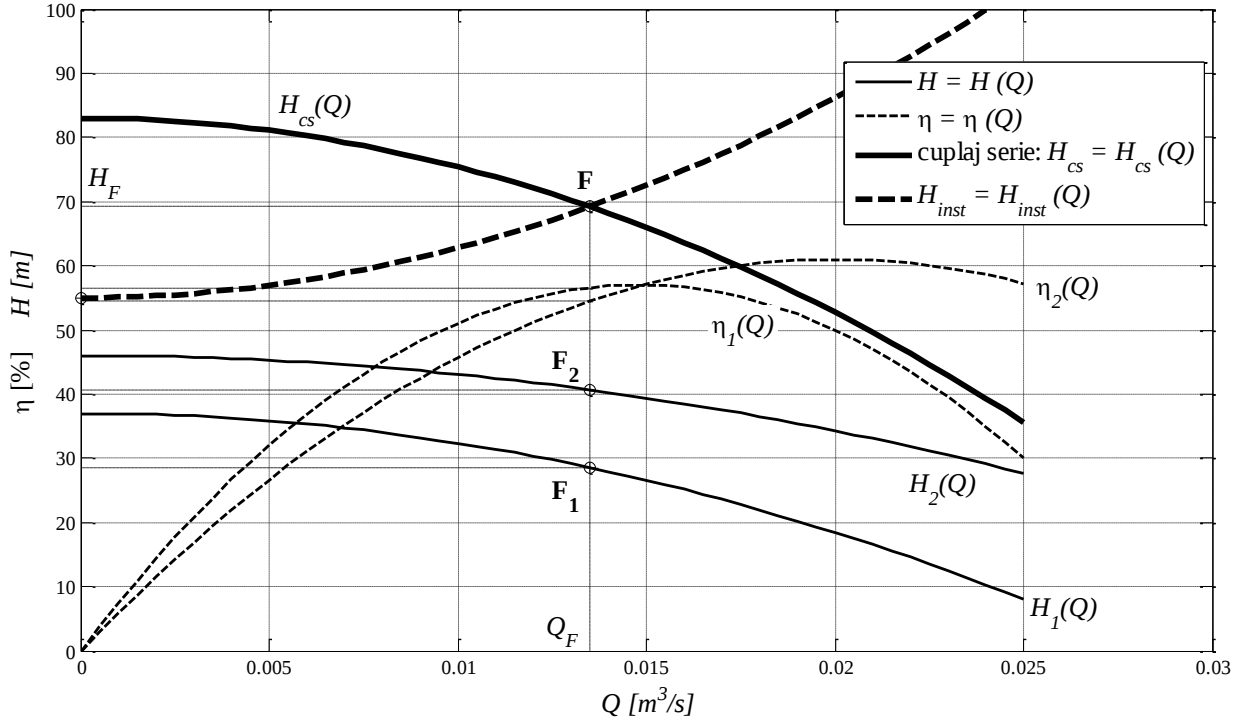


Fig. 1.12. – Cuplarea în serie a două pompe diferite

Randamentul global al ansamblului de pompe înseriate se determină cu relația:

$$\eta_F = \frac{H_F}{\frac{H_{F_1}}{\eta_{F_1}} + \frac{H_{F_2}}{\eta_{F_2}}}. \quad (1.51)$$

În cazul **pompelor multietajate**, caracteristica energetică a pompei cu m etaje se obține grafic prin multiplicarea de m ori pe verticală (la același debit) a înălțimii de pompare corespunzătoare caracteristicii energetice a unui etaj.

1.2.4. Cuplarea turbopompelor în paralel

În situația în care debitul necesar consumatorilor nu poate fi asigurat de către o singură pompă, se recurge la cuplarea pompelor în paralel. În figura 1.13 este prezentată schema unei instalații hidraulice alimentată de **două pompe diferite, P_1 și P_2 , cuplate în paralel**, caracteristicile energetice, respectiv de randament ale pompelor fiind [14], [16]: $H_1 = H_1(Q)$, $H_2 = H_2(Q)$, $\eta_1 = \eta_1(Q)$ și $\eta_2 = \eta_2(Q)$.

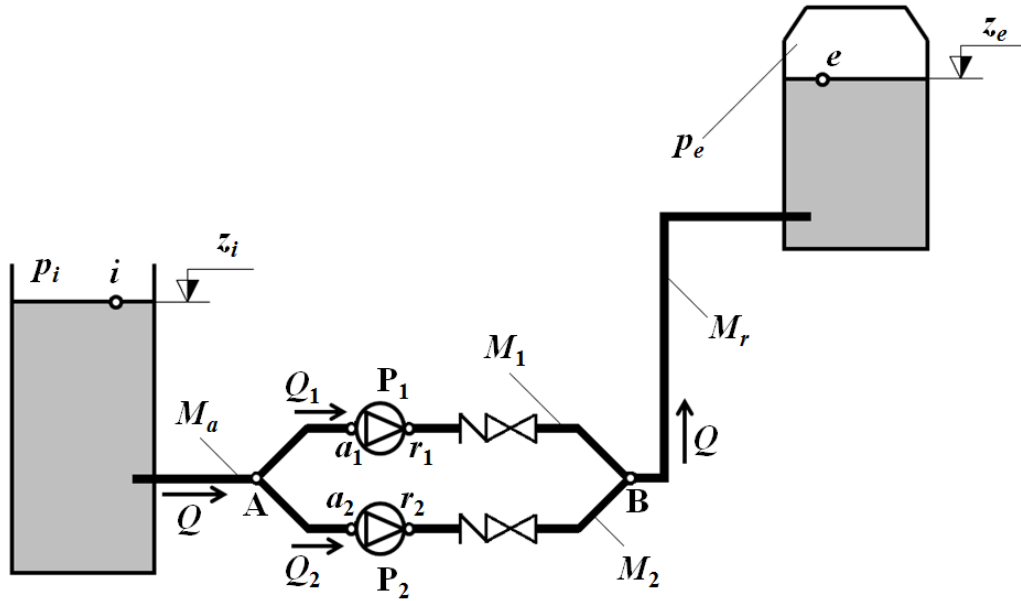


Fig. 1.13. – Instalație hidraulică cu două pompe cuplate în paralel

Sistemul hidraulic este compus dintr-o **conductă magistrală de aspirație** (între rezervorul de aspirație și nodul A), al cărei modul de rezistență hidraulică este M_a , respectiv o **conductă magistrală de refulare** (între nodul B și rezervorul de refulare), al cărei modul de rezistență hidraulică este M_r . Între nodurile A și B sunt **montate în paralel două pompe, cu caracteristici energetice diferite**. Fiecare pompă are o conductă scurtă de aspirație (între punctele A și a_j), respectiv o conductă scurtă de refulare (între punctele r_j și B); aceste două conducte au împreună un modul de rezistență notat M_j , unde $j \in \{1; 2\}$, care include și coeficienții de pierdere de sarcină hidraulică locală în clapetă anti-retur și la vană.

În cazul unui sistem hidraulic care include pompe cuplate în paralel, **legea energiei între intrarea i și ieșirea e din sistem se poate scrie pe oricare dintre traseele care leagă cele două puncte**. Pentru configurația geometrică din figura 1.13, legea energiei se poate scrie pe ambele trasee $i-A-P_j-B-e$ (unde P_j este pompa j), cu $j \in \{1; 2\}$, rezultând:

$$H_i + H_j(Q_j) = H_e + h_{r_{i-e}}, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}. \quad (1.52)$$

Explicitând sarcinile hidrodinamice H_i , respectiv H_e (cu vitezele v_i și v_e neglijabile) și utilizând relația (1.22) de definiție a înălțimii statice H_s , (1.52) devine:

$$H_j(Q_j) = H_s + h_{r_{i-A}} + h_{r_{A-P_j-B}} + h_{r_{B-e}}, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}. \quad (1.53)$$

Cu notațiile din figura 1.13, pierderile de sarcină hidraulică din relația (1.53) pot fi exprimate astfel:

- pierderile de sarcină hidraulică aferente conductelor magistrale (instalației), notate h_r unde

$$h_r = h_{r_{i-A}} + h_{r_{B-e}} = (M_a + M_r)Q^2 = MQ^2; \quad (1.54)$$

- pierderile de sarcină hidraulică aferente conductelor care conectează pompa P_j la nodurile A și B,

$$h_{r_{A-P_j-B}} = M_j Q_j^2, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}. \quad (1.55)$$

Cu (1.54) și (1.55), relația (1.53) devine:

$$H_j(Q_j) = (H_s + MQ^2) + M_j Q_j^2, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}, \quad (1.56)$$

iar prin rearanjarea termenilor, rezultă:

$$H_j(Q_j) - M_j Q_j^2 = H_s + MQ^2, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}, \quad (1.57)$$

Membrul stâng al relației (1.57) reprezintă **caracteristica energetică redusă a pompei** $H_{red j}(Q_j)$:

$$H_{red j}(Q_j) = H_j(Q_j) - M_j Q_j^2, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}, \quad (1.58)$$

iar membrul drept reprezintă **caracteristica instalației** (instalație care, pentru configurația din figura 1.13, este alcătuită din conductele magistrale din amonte, respectiv aval de cuplajul realizat între nodurile A și B):

$$H_{inst}(Q) = H_s + MQ^2. \quad (1.59)$$

Adăugând la (1.57) și ecuația continuității, **pentru cuplarea în paralel a pompelor se poate scrie următorul sistem de ecuații:**

$$\begin{cases} Q = Q_1 + Q_2 \\ H_{red1}(Q_1) = H_1(Q_1) - M_1 Q_1^2 = H_{inst}(Q) \\ H_{red2}(Q_2) = H_2(Q_2) - M_2 Q_2^2 = H_{inst}(Q) \end{cases}, \quad (1.60)$$

unde H_{inst} reprezintă energia raportată la greutate, pe care trebuie să o primească fluidul între nodurile A și B, pentru ca între punctele i și e să circule debitul Q . Se urmărește obținerea unei curbe similare, care să reprezinte energia raportată la greutate pe care o poate introduce în instalație ansamblul pompelor cuplate în paralel. Pentru aceasta, pornind de la caracteristicile energetice ale pompelor, mai întâi sunt construite curbe de forma: $H_{red j} = H_{red j}(Q_j)$.

Reprezentarea grafică a relației (1.58) reprezintă **caracteristica energetică redusă a unei pompe montate în paralel**, sau (într-o terminologie simplificată) **caracteristica redusă a pompei** (figura 1.14). Apoi, prin **însumarea grafică în paralel a caracteristicilor reduse ale**

celor două pompe, $H_{red1}(Q_1)$ și $H_{red2}(Q_2)$, adică prin însumarea debitelor Q_1 și Q_2 la aceeași înălțime de pompare redusă pentru fiecare pompă, se obține **caracteristica energetică a ansamblului de pompe cuplate în paralel**, notată $H_{cp} = H_{cp}(Q)$, trasată de asemenea în figura 1.14.

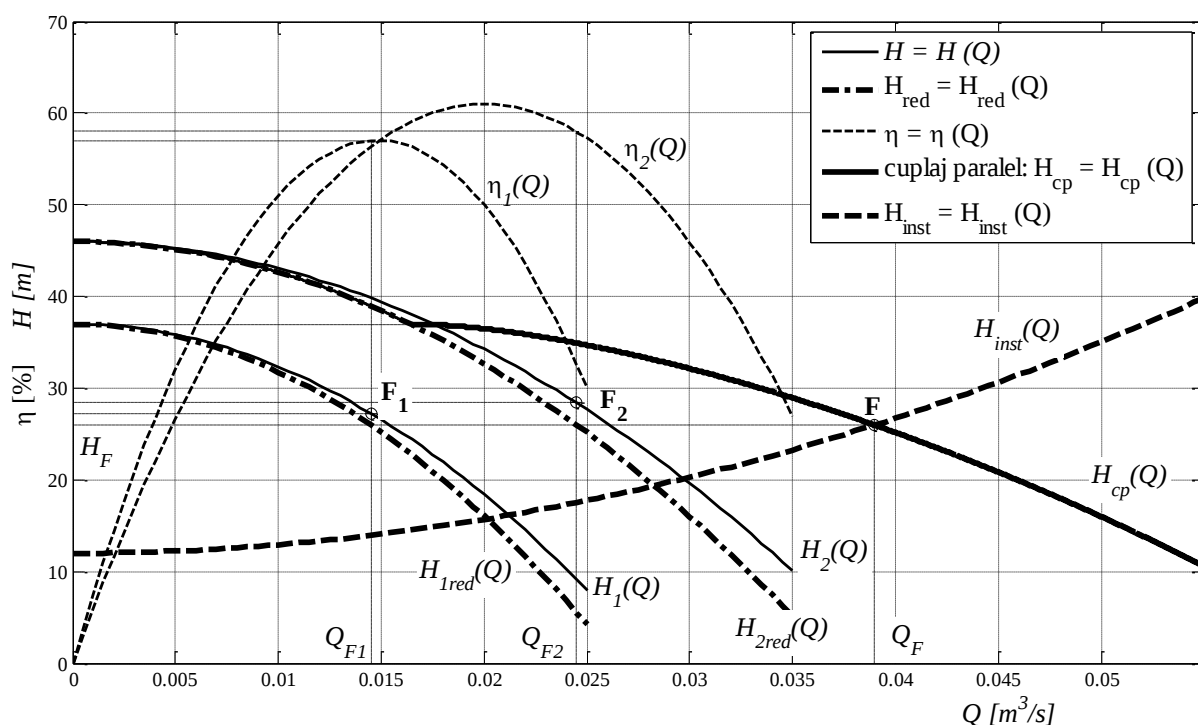


Fig. 1.14. – Cuplarea în paralel a două pompe diferite

Pentru înălțimi de pompare superioare valorii maxime corespunzătoare caracteristicii reduse a primei pompe, $H_{red1}(Q_1)$, caracteristica ansamblului $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ coincide cu caracteristica $H_{red2}(Q_2)$ a celei de-a doua pompe, deoarece pompele au clapete anti-retur, montate după flanșa de refulare, acestea împiedicând recircularea lichidului.

Punctul de funcționare energetică al ansamblului în instalația dată este notat **F** și se obține la intersecția dintre **caracteristica instalației** $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definită prin (1.59) și **caracteristica energetică a ansamblului de pompe cuplate în paralel** $H_{cp} = H_{cp}(Q)$.

În punctul **F** (figura 1.14), **debitul pompat** are valoarea Q_F , iar **înălțimea de pompare asigurată de cuplarea în paralel a pompelor** are valoarea $H_F = H_{cp}(Q_F)$. La intersecția

dintre orizontala $H = H_F$ cu caracteristica energetică redusă a fiecărei pompe $H_{red\,j}(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, se obțin valorile debitului vehiculat prin fiecare pompă: Q_{F_1} și Q_{F_2} .

Ecuatia continuității poate fi verificată prin însumarea valorilor obținute, rezultând:

$$Q_F = Q_{F_1} + Q_{F_2}. \quad (1.61)$$

Punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe cuplate în paralel, anume punctul F_1 pentru prima pompă și punctul F_2 pentru cea de-a doua pompă (figura 1.14) se situează pe caracteristica energetică $H_j(Q_j)$ a fiecărei pompe, la intersecția fiecărei caracteristici cu verticala $Q = Q_{F_j}$, cu $j \in \{1; 2\}$. **Înălțimile de pompare asigurate de fiecare dintre cele două pompe** au valorile: $H_{F_1} = H_1(Q_{F_1})$, respectiv $H_{F_2} = H_2(Q_{F_2})$, **aceste valori fiind mai mari decât valoarea** $H_F = H_{cp}(Q_F)$, deci:

$$H_F < H_{F_j}, \text{ cu } j \in \{1; 2\}. \quad (1.62)$$

Pe caracteristicile de randament ale pompelor, se citesc valorile **randamentelor corespunzătoare funcționării fiecărei pompe**, anume: $\eta_{F_1} = \eta_1(Q_{F_1})$ și $\eta_{F_2} = \eta_2(Q_{F_2})$.

Puterea electrică consumată de fiecare pompă se calculează apoi cu relația:

$$P_{F_j} = \frac{\rho g Q_{F_j} H_{F_j}}{\eta_{F_j}}, \text{ cu } j \in \{1; 2\}. \quad (1.63)$$

2. PROBLEME SIMPLE REZOLVATE

2.1. Punctul de funcționare energetică al turbopompei

Problema 2.1.1. – Punctul de funcționare energetică al unei pompe axiale

Se consideră pompa axială **P** din figura 2.1, care funcționează la turație nominală. Cele două rezervoare, de aspirație și de refulare, sunt deschise la presiunea atmosferică: $p_i = p_e = 0$ Pa (scară manometrică). La suprafața liberă a rezervoarelor, viteza apei este nulă: $v_i = v_e = 0$. Înălțimea geodezică este: $H_g = (z_e - z_i) = 6,5$ m. Modulul de rezistență hidraulică al instalației este: $M = 1,5 \text{ s}^2/\text{m}^5$.

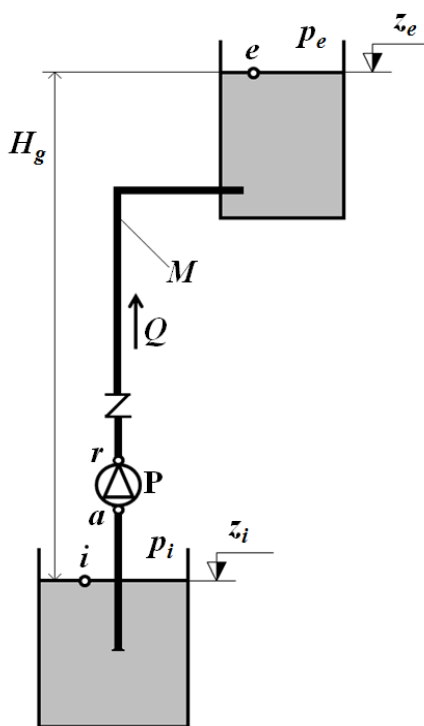


Fig. 2.1. – Schema instalației hidraulice alimentate cu pompă axială

Caracteristica energetică a pompei axiale $H = H(Q)$ se dă **sub formă tabelară** (vezi tabelul 2.1), pe perechi de valori $\{Q, H\}$, pentru 12 valori discrete ale debitului Q în m^3/s , cuprinse în intervalul $Q \in [0,5; 2,22] \text{ m}^3/\text{s}$.

Se cere:

- ① Să se traseze pe același grafic caracteristica energetică $H = H(Q)$ a pompei axiale și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$;
- ② Să se poziționeze pe grafic punctul de funcționare energetică **F** al pompei și să se determine valorile debitului Q_F [m^3/s] și înălțimii de pompare H_F [m] în punctul **F**.

Tabel 2.1. – Perechile de valori $\{Q, H\}$ ale caracteristicii energetice a pompei axiale

Q [m^3/s]	0,5	0,6	0,75	0,8	0,85	1
H [m]	13,2	12	10,95	10,8	10,7	10,7
Q [m^3/s]	1,1	1,25	1,5	1,75	2	2,22
H [m]	10,65	10,2	9,05	7,3	4,8	1,8

Rezolvare

① În figura 2.2 este trasată caracteristica energetică $H = H(Q)$ a pompei, definită de perechile de valori $\{Q, H\}$ din tabelul 2.1.

Caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ este descrisă de relația (1.33), în care înălțimea statică H_s definită prin (1.22) are valoarea:

$$H_s = \frac{p_e - p_i}{\rho g} + H_g = H_g = 6,5 \text{ m.}$$

Rezultă următoarea relație de definiție a caracteristicii instalației pentru problema considerată:

$$H_{inst} = H_s + MQ^2 = 6,5 + 1,5Q^2. \quad (2.1)$$

Pentru 6 valori discrete ale debitului Q în m^3/s , cuprinse în intervalul $Q \in [0; 2,2] \text{ m}^3/\text{s}$, în tabelul 2.2 sunt trecute perechile de valori $\{Q, H_{inst}\}$, definite prin (2.1). Reprezentarea grafică a caracteristicii instalației (2.1) este efectuată în figura 2.2.

Tabel 2.2. – Perechile de valori $\{Q, H_{inst}\}$ ale caracteristicii instalației

Q [m^3/s]	0	0,5	1	1,5	2	2,2
H_{inst} [m]	6,5	6,86	8	9,88	12,5	13,76

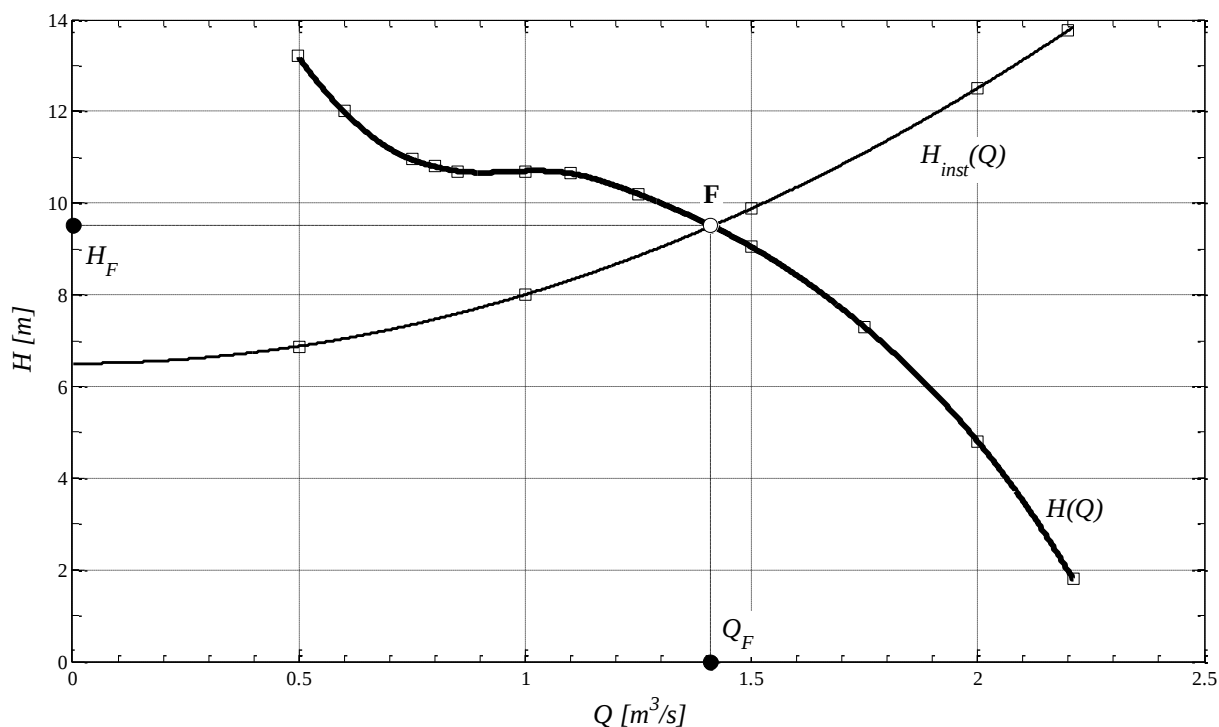


Fig. 2.2. – Punctul de funcționare energetică **F** al pompei axiale

② În figura 2.2, punctul de funcționare energetică **F** este situat la intersecția dintre caracteristica energetică a pompei $H = H(Q)$ și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definită prin (2.1). Valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F , corespunzătoare punctului **F**, pot fi **citite direct pe axele diagramei** din figura 2.2, la capătul liniilor indicatoare punctate, orizontale și verticale, care pleacă din **F**. Rezultă următoarele valori: debitul $Q_F = 1,41 \text{ m}^3/\text{s}$, respectiv înălțimea de pompare $H_F = 9,5 \text{ m}$.

Problema 2.1.2. – Punctul de funcționare energetică al unei pompe centrifuge

Se consideră pompa centrifugă **P** din figura 2.3, care funcționează la turație nominală. Pe suprafața liberă a rezervorului de aspirație, cota apei este $z_i = 0 \text{ m}$, viteza apei este $v_i \cong 0$, iar presiunea este egală cu presiunea atmosferică. Pe suprafața liberă a rezervorului de refulare, cota apei este $z_e = 10 \text{ m}$, viteza apei este $v_e \cong 0$, iar presiunea în perna de gaz este $p_e = 1 \text{ bar}$ (scară manometrică). Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$. Modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație este

$M_a = 7000 \text{ s}^2/\text{m}^5$, iar modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare este $M_r = 30000 \text{ s}^2/\text{m}^5$.

Caracteristica energetică $H = H(Q)$ a pompei centrifuge și caracteristica de randament $\eta = \eta(Q)$ se dau **sub formă tabelară** (vezi tabelul 2.3), pe perechi de valori $\{Q, H\}$, respectiv $\{Q, \eta\}$, pentru 6 valori discrete ale debitului Q în litri pe secundă, cuprinse în intervalul $Q \in [0; 25] \text{ l/s}$, adică $Q \in [0; 0,025] \text{ m}^3/\text{s}$ (calculule sunt efectuate cu unitățile de măsură în S.I.).

Tabel 2.3. – Perechile de valori $\{Q, H\}$ și $\{Q, \eta\}$ ale curbelor caracteristice ale pompei

$Q \text{ [l/s]}$	0	5	10	16	21	25
$Q \text{ [m}^3/\text{s]}$	0	0,005	0,01	0,016	0,021	0,025
$H \text{ [m]}$	46	45,27	43,07	38,49	33,06	27,66
$\eta \text{ [-]}$	0	0,267	0,457	0,585	0,609	0,573

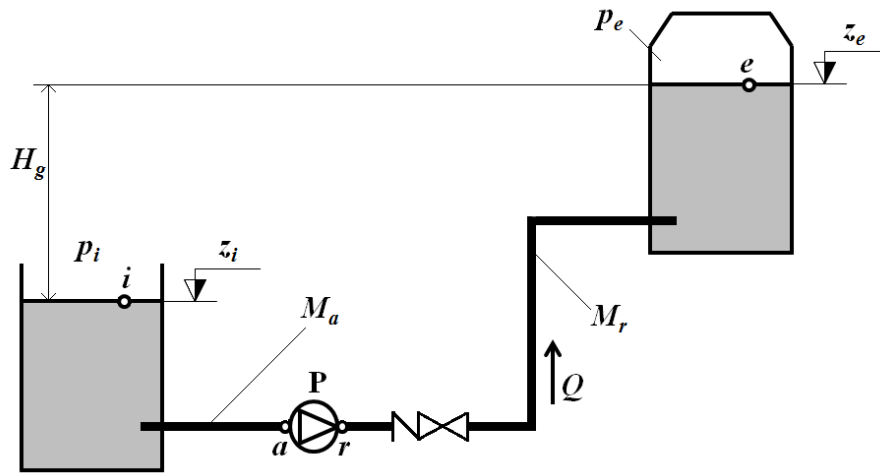


Fig. 2.3. – Schema instalației hidraulice alimentate cu pompă centrifugă

Se cere:

- ① Să se traseze pe același grafic curbele caracteristice ale pompei: $H = H(Q)$ și $\eta = \eta(Q)$, precum și caracteristica instalației: $H_{inst} = H_{inst}(Q)$;
- ② Să se poziționeze pe grafic punctul de funcționare energetică **F** al pompei și să se determine valorile debitului $Q_F \text{ [m}^3/\text{s]}$, înălțimii de pompare $H_F \text{ [m]}$ și randamentului η_F în **F**;
- ③ Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în kW.

Rezolvare

① Curbele caracteristice $H = H(Q)$ și $\eta = \eta(Q)$ sunt trasate în figura 2.4. Caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ este descrisă de relația (1.33), în care înălțimea statică H_s definită prin (1.22) are valoarea:

$$H_s = \frac{p_e - p_i}{\rho g} + H_g = \frac{p_e - p_i}{\rho g} + (z_e - z_i) = (10 - 0) + (10 - 0) = 20 \text{ m},$$

iar modulul de rezistență hidraulică al instalației M este calculat ca sumă a modulelor de rezistență aferente conductelor de aspirație și de refulare:

$$M = M_a + M_r = 7000 + 30000 = 37000 \text{ s}^2/\text{m}^5.$$

Cu aceste valori, caracteristica instalației pentru problema considerată este definită astfel:

$$H_{inst} = H_s + MQ^2 = 20 + 37000 Q^2. \quad (2.2)$$

În tabelul 2.4 sunt trecute 6 perechi de valori $\{Q, H_{inst}\}$, definite prin (2.2). Reprezentarea grafică a caracteristicii instalației (2.2) este efectuată în figura 2.4.

② În figura 2.4, punctul de funcționare energetică **F** este situat la intersecția dintre caracteristica energetică a pompei $H = H(Q)$ și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definită prin (2.2).

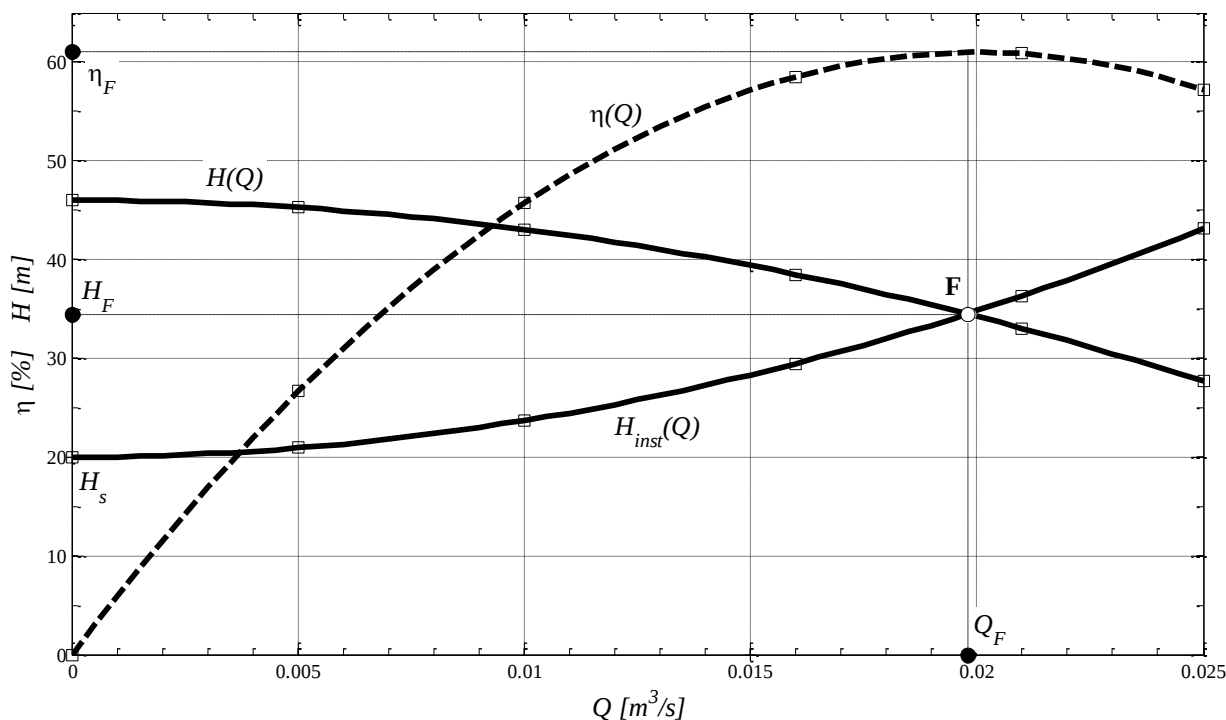


Fig. 2.4. – Punctul de funcționare energetică **F** al pompei centrifuge

Tabel 2.4. – Perechile de valori $\{Q, H_{inst}\}$ ale caracteristicii instalației

$Q \text{ [m}^3/\text{s]}$	0	0,005	0,01	0,016	0,021	0,025
$H_{inst} \text{ [m]}$	20	20,93	23,7	29,47	36,32	43,13

Valorile debitului Q_F , înălțimii de pompare H_F și randamentului η_F , corespunzătoare punctului **F**, pot fi **citite direct pe axele diagramei** din figura 2.4, la capătul liniilor indicatoare punctate, orizontale și verticale, care pleacă din **F**. Rezultă următoarele valori: debitul $Q_F = 0,02 \text{ m}^3/\text{s}$, înălțimea de pompare $H_F = 34,5 \text{ m}$, respectiv randamentul $\eta_F = 0,61$ (valoarea randamentului în procente, citită pe graficul din figura 2.4, fiind $\eta_F = 61\%$).

③ Puterea electrică consumată pentru pompare P_F este definită prin relația (1.34):

$$P_F = \frac{\rho g Q_F H_F}{\eta_F} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,02 \cdot 34,5}{0,61} = 11311 \text{ W} \cong 11,3 \text{ kW}.$$

Problema 2.1.3. – Modificarea punctului de funcționare energetică al unei pompe centrifuge prin închiderea vanei de pe conducta de refulare

Se consideră instalația hidraulică din figura 2.3, în care pompa centrifugă **P** funcționează la turație nominală. Datele instalației sunt cele din Problema 2.1.2, deci înălțimea statică este $H_s = 20 \text{ m}$, iar modulul de rezistență hidraulică al instalației este $M = 37000 \text{ s}^2/\text{m}^5$.

Caracteristica energetică a pompei centrifuge $H = H(Q)$ și caracteristica de randament $\eta = \eta(Q)$, date prin perechi de valori $\{Q, H\}$ și $\{Q, \eta\}$ în tabelul 2.3, sunt approximate aici prin **funcții polinomiale de gradul al doilea**, care depind de debitul Q în m^3/s , pentru o plajă de variație a debitului $0 \leq Q \leq 0,025 \text{ m}^3/\text{s}$, anume:

- caracteristica energetică a pompei: $H = 46 - 29350 Q^2 \text{ [m]}$;
- caracteristica de randament a pompei: $\eta = 60,9 Q - 1520 Q^2 \text{ [-]}$.

Se cere:

① Să se traseze pe același grafic curbele caracteristice ale pompei: $H = H(Q)$ și $\eta = \eta(Q)$, precum și caracteristica instalației: $H_{inst} = H_{inst}(Q)$;

② Să se poziționeze pe grafic punctul de funcționare energetică **F** al pompei și să se determine prin **calcul analitic** valorile debitului $Q_F \text{ [m}^3/\text{s]}$, înălțimii de pompare $H_F \text{ [m]}$ și randamentului η_F în punctul **F**;

- ③ Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în kW;
- ④ Cu ajutorul vanei de pe conducta de refulare a pompei se reglează (se modifică) funcționarea pompei, anume se închide parțial vana pentru a diminua debitul, până la atingerea punctului de funcționare energetică F_2 , în care valoarea debitului pompat este $Q_{F_2} = 0,015 \text{ m}^3/\text{s}$. Să se determine valoarea modulului de rezistență hidraulică M_2 al instalației, cuprins în relația de definiție a caracteristicii instalației $H_{inst2} = H_{inst2}(Q)$ care trece prin punctul F_2 . Să se traseze grafic caracteristica $H_{inst2} = H_{inst2}(Q)$;
- ⑤ Să se determine puterea electrică consumată pentru pompare P_{F_2} în punctul de funcționare energetică F_2 , exprimată în kW.

Rezolvare

① Caracteristica energetică $H = H(Q) = (46 - 29350 Q^2)$ și caracteristica de randament a pompei $\eta = \eta(Q) = (60,9 Q - 1520 Q^2)$ sunt trasate în figura 2.5, pe întreaga plajă de variație a debitului Q , anume: $0 \leq Q \leq 0,025 \text{ m}^3/\text{s}$. Pentru această problemă, caracteristica instalației este definită prin relația (2.2), adică: $H_{inst} = H_{inst}(Q) = (20 + 37000 Q^2)$; reprezentarea grafică a caracteristicii instalației este efectuată, de asemenea, în figura 2.5.

② În figura 2.5, punctul de funcționare energetică F este situat la intersecția dintre caracteristica energetică a pompei $H = H(Q)$ și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definită prin (2.2). Valorile debitului Q_F , înălțimii de pompare H_F și randamentului η_F , corespunzătoare punctului F , pot fi **determinate analitic**, deoarece dispunem de funcții polinomiale simple care descriu aceste curbe caracteristice.

În punctul F sunt intersectate două curbe, $H = H(Q)$ și $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, descrise prin polinoame de gradul al doilea, deci în F se poate scrie următorul sistem de ecuații:

$$H_F = 46 - 29350 Q_F^2 = 20 + 37000 Q_F^2, \quad (2.3)$$

a cărui soluție este:

$$Q_F = \sqrt{\frac{46 - 20}{37000 + 29350}} = 0,0198 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Cu această valoare a debitului Q_F , pentru oricare dintre cele două ecuații din (2.3), se obține înălțimea de pompare H_F , de exemplu:

$$H_F = 46 - 29350 Q_F^2 = 46 - 29350 \cdot 0,0198^2 \cong 34,50 \text{ m.}$$

Din ecuația care descrie caracteristica de randament, rezultă valoarea randamentului agregatului de pompare η_F , în punctul F:

$$\eta_F = 60,9 Q_F - 1520 Q_F^2 \cong 0,61.$$

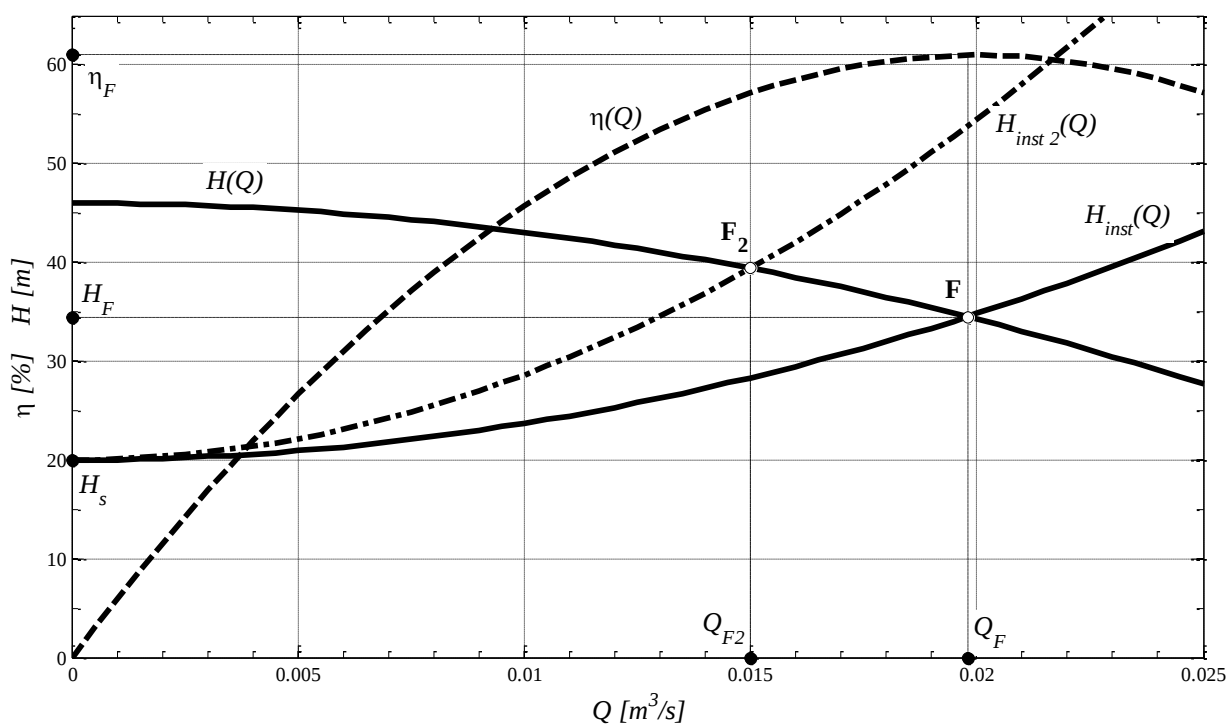


Fig. 2.5. – Punctele de funcționare energetică **F** și **F₂** în cazul reglării funcționării pompei centrifuge cu vana de pe conducta de refulare

③ Puterea electrică consumată pentru pompare P_F este definită prin relația (1.34):

$$P_F = \frac{\rho g Q_F H_F}{\eta_F} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0198 \cdot 34,5}{0,61} = 11198 \text{ W} \cong 11,2 \text{ kW.}$$

④ Prin închiderea vanei de pe conducta de refulare a pompei, punctul de funcționare energetică al pompei se mută din poziția **F**, în poziția **F₂** care se află pe caracteristica energetică a pompei, în dreptul debitului $Q_{F2} = 0,015 \text{ m}^3/\text{s}$ (vezi figura 2.5). Înălțimea de pompare H_{F2} , corespunzătoare punctului de funcționare energetică **F₂**, se poate **determina analitic**, din ecuația $H = H(Q)$, astfel:

$$H_{F2} = 46 - 29350 Q_{F2}^2 = 46 - 29350 \cdot 0,015^2 \cong 39,40 \text{ m.}$$

Relația de definiție a caracteristicii instalației $H_{inst2} = H_{inst2}(Q)$, care trece prin punctul F_2 , se scrie:

$$H_{inst2} = 20 + M_2 Q^2, \quad (2.4)$$

în care valoarea modulului de rezistență hidraulică M_2 al instalației este necunoscută. Punctul F_2 , caracterizat de valorile $\{Q_{F_2}, H_{F_2}\}$, trebuie să se afle pe caracteristica instalației, deci:

$$H_{F_2} = 20 + M_2 Q_{F_2}^2 = 20 + M_2 \cdot 0,015^2 = 39,40 \text{ m}. \quad (2.5)$$

Din relația (2.5), se obține valoarea modulului de rezistență hidraulică M_2 :

$$M_2 = \frac{39,4 - 20}{0,015^2} = 86206 \text{ s}^2/\text{m}^5,$$

care inserată în (2.4), permite trasarea grafică a noii caracteristici a instalației (vezi figura 2.5), definite prin relația: $H_{inst2} = 20 + 86206 Q^2$.

⑤ Din ecuația $\eta = \eta(Q)$, rezultă valoarea randamentului agregatului de pompare η_{F_2} , în noul punct de funcționare energetică F_2 :

$$\eta_{F_2} = 60,9 Q_{F_2} - 1520 Q_{F_2}^2 \cong 0,572.$$

Puterea electrică consumată pentru pompare P_{F_2} , definită prin (1.34), are valoarea:

$$P_{F_2} = \frac{\rho g Q_{F_2} H_{F_2}}{\eta_{F_2}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,015 \cdot 39,4}{0,572} = 10332 \text{ W} \cong 10,3 \text{ kW}.$$

2.2. Punctul de funcționare cavitațională al turbopompei

Problema 2.2.1. – Punctul de funcționare cavitațională în cazul unei instalații de pompare cu contrapresiune la aspirație

Se consideră pompa centrifugă **P** din figura 2.6, care funcționează la turație nominală. Pe suprafața liberă a rezervorului de aspirație, cota apei este $z_i = 4 \text{ m}$, viteza apei este $v_i \cong 0$, iar înălțimea dată de presiunea absolută este $p_i/\rho g = 10 \text{ m}$. Pe suprafața liberă a rezervorului de refulare, cota apei este $z_e = 15 \text{ m}$, viteza apei este $v_e \cong 0$, iar înălțimea dată de presiunea absolută este $p_e/\rho g = 20 \text{ m}$. La aspirația pompei, cota punctului *a* este: $z_a = 0 \text{ m}$. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$. Presiunea

absolută de vaporizare a apei la 15°C este $p_v = 12,8 \text{ mmHg} = 1,71 \text{ kPa}$, adică $p_v/\rho g \cong 0,17 \text{ m}$. Modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație este $M_a = 15000 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare este $M_r = 18000 \text{ s}^2/\text{m}^5$.

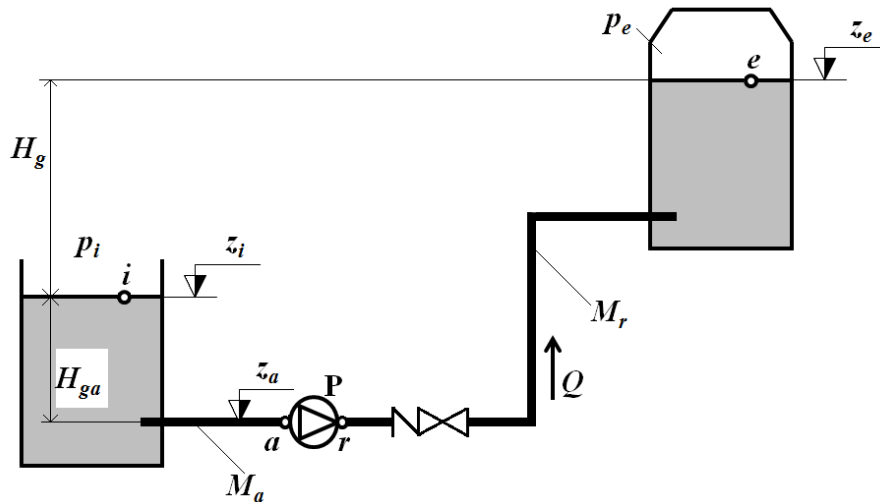


Fig. 2.6. – Schema instalației hidraulice alimentate cu pompă centrifugă

Caracteristica energetică a pompei centrifuge $H = H(Q)$, caracteristica de randament $\eta = \eta(Q)$ și caracteristica de cavitație a pompei $NPSH = NPSH(Q)$ se dau **sub formă tabelară** (tabelul 2.5), pe perechi de valori $\{Q, H\}$, $\{Q, \eta\}$, respectiv $\{Q, NPSH\}$, pentru 6 valori discrete ale debitului Q în litri pe secundă, cuprinse în intervalul $Q \in [0; 22] \text{ l/s}$, adică $Q \in [0; 0,022] \text{ m}^3/\text{s}$.

Tabel 2.5. – Perechile de valori $\{Q, H\}$, $\{Q, \eta\}$ și $\{Q, NPSH\}$ ale curbelor caracteristice

$Q \text{ [l/s]}$	0	5	10	15	20	22
$Q \text{ [m}^3/\text{s]}$	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,022
$H \text{ [m]}$	50	48,62	44,50	37,62	28,00	23,38
$\eta \text{ [-]}$	0	0,337	0,550	0,637	0,600	0,550
$NPSH \text{ [m]}$	2	2,25	3,20	4,85	7,20	8,34

Se cere:

① Să se traseze pe același grafic:

- curbele caracteristice ale pompei: $H = H(Q)$, $\eta = \eta(Q)$ și $NPSH = NPSH(Q)$;
- caracteristica instalației: $H_{inst} = H_{inst}(Q)$;

- curba cavitațională a instalației $NPSH_{inst} = NPSH_{inst}(Q)$;
- ② Să se poziționeze pe grafic punctul de funcționare energetică **F** al pompei și să se determine valorile debitului Q_F [m^3/s], înălțimii de pompare H_F [m] și randamentului η_F în **F**;
- ③ Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în kW;
- ④ Să se poziționeze pe grafic punctul de funcționare cavitațională **C** al pompei și să se determine valoarea limită a debitului Q_{lim} [m^3/s] în punctul **C**;
- ⑤ Pe baza valorilor de NPSH cerut de pompă în punctul **F**, $NPSH(Q_F)$, respectiv de NPSH disponibil în instalație în punctul **F**, $NPSH_{inst}(Q_F)$, sau pe baza valorilor obținute pentru debitele Q_F și Q_{lim} , să se menționeze dacă pompa funcționează fără cavitație, sau cu cavitație la aspirație.

Rezolvare

① Curbele caracteristice $H = H(Q)$, $\eta = \eta(Q)$ și $NPSH = NPSH(Q)$ sunt trasate în figura 2.7. Caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ este descrisă de relația (1.33), în care înălțimea statică H_s definită prin (1.22) are valoarea:

$$H_s = \frac{p_e - p_i}{\rho g} + H_g = \frac{p_e - p_i}{\rho g} + (z_e - z_i) = (20 - 10) + (15 - 4) = 21 \text{ m},$$

iar modulul de rezistență hidraulică al instalației M este calculat ca sumă a modulelor de rezistență aferente conductelor de aspirație și de refulare:

$$M = M_a + M_r = 15000 + 18000 = 33000 \text{ s}^2/\text{m}^5.$$

Cu aceste valori, caracteristica instalației pentru problema considerată este definită astfel:

$$H_{inst} = H_s + MQ^2 = 21 + 33000 Q^2. \quad (2.6)$$

În tabelul 2.6 sunt inserate valorile H_{inst} [m], calculate cu relația (2.6), pentru 6 valori discrete ale debitului Q .

Tabel 2.6. – Valorile parametrilor calculați

Q [m^3/s]	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,022
H_{inst} [m]	21	21,82	24,30	28,42	34,20	36,97
$NPSH_{inst}$ [m]	13,93	13,45	12,33	10,45	7,83	6,57

Înălțimea geodezică de aspirație a pompei H_{ga} este definită prin (1.19) și, pentru cazul studiat aici, are valoare negativă (contrapresiune la aspirație):

$$H_{ga} = z_a - z_i = 0 - 4 = -4 \text{ m.}$$

Curba cavitațională a instalației $NPSH_{inst} = NPSH_{inst}(Q)$ este descrisă de relația (1.35), care în cazul de față se scrie:

$$\begin{aligned} NPSH_{inst} &= \frac{p_{absi} - p_v}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} - H_{ga} - M_a Q^2 = \\ &= (10 - 0,17) + 0 - (-4) - 15000 Q^2 = 13,83 - 15000 Q^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

În tabelul 2.6 sunt inserate valorile $NPSH_{inst}$ [m], calculate cu relația (2.7), pentru 6 valori discrete ale debitului Q .

Caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definită prin (2.6), respectiv curba cavitațională a instalației $NPSH_{inst} = NPSH_{inst}(Q)$, definită prin (2.7), sunt trasate în figura 2.7.

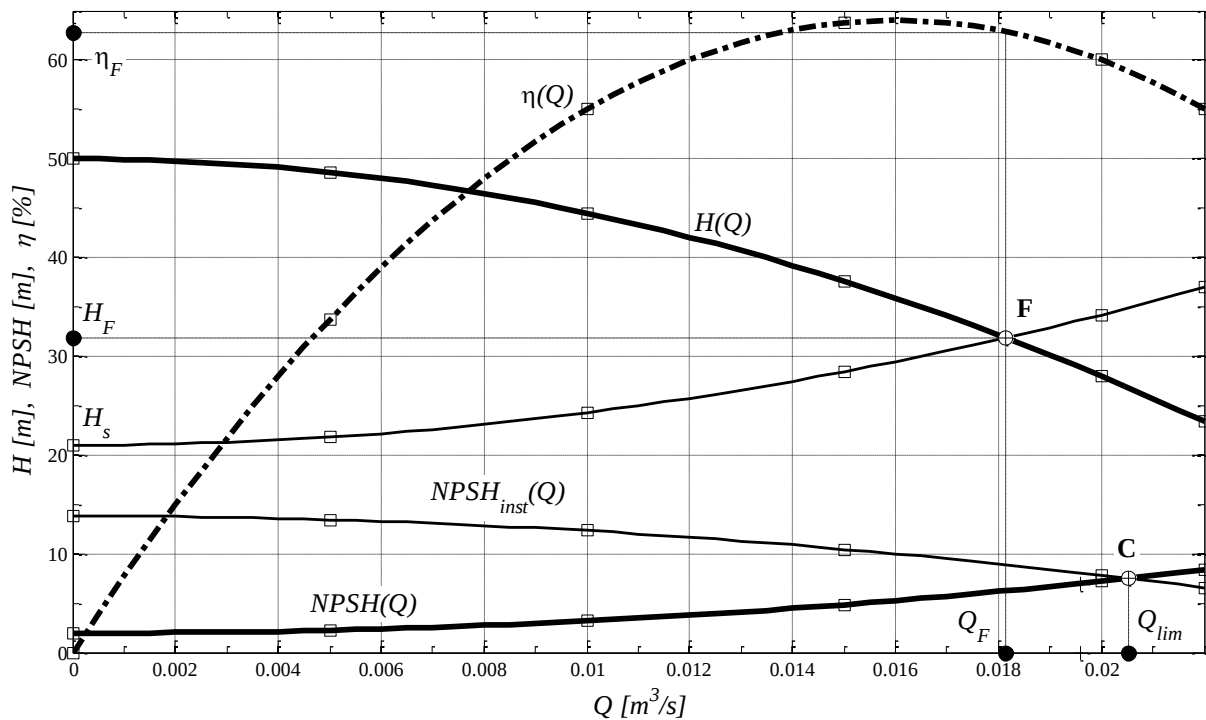


Fig. 2.7. – Punctul de funcționare energetică **F** și punctul de funcționare cavitațională **C** (punctul **F** se află la stânga punctului **C**, deci pompa nu cavitează)

② În figura 2.7, punctul de funcționare energetică **F** este situat la intersecția dintre caracteristica energetică a pompei $H = H(Q)$ și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$,

definită prin (2.6). Valorile debitului Q_F [m^3/s], înălțimii de pompare H_F [m] și randamentului η_F [-], corespunzătoare punctului **F**, pot fi **citite direct pe axele diagramei** din figura 2.7, la capătul liniilor indicatoare punctate, orizontale și verticale, care pleacă din **F**. Rezultă următoarele valori: debitul $Q_F = 0,0182 \text{ m}^3/\text{s}$, înălțimea de pompare $H_F = 32 \text{ m}$, respectiv randamentul $\eta_F = 0,63$ (valoarea randamentului în procente, citită pe graficul din figura 2.7, fiind: $\eta_F = 63 \%$).

③ Puterea electrică consumată pentru pompare P_F este definită prin relația (1.34):

$$P_F = \frac{\rho g Q_F H_F}{\eta_F} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0182 \cdot 32}{0,63} = 9244,4 \text{ W} \cong 9,4 \text{ kW}.$$

④ În figura 2.7, punctul de funcționare cavitațională **C** este situat la intersecția dintre caracteristica de cavitație a pompei $NPSH = NPSH(Q)$ și curba cavitațională a instalației $NPSH_{inst} = NPSH_{inst}(Q)$, definită prin (2.7). Valoarea debitului Q_{lim} [m^3/s], corespunzătoare punctului **C**, poate fi **citită direct pe axele diagramei** din figura 2.7, la capătul liniei indicatoare punctate verticale, care pleacă din **C**. Rezultă: $Q_{lim} = 0,0205 \text{ m}^3/\text{s}$.

⑤ Pentru funcționarea pompei fără cavitație, trebuie îndeplinită condiția (1.23), în care valorile de NPSH sunt calculate pentru Q_F :

$$NPSH(Q_F) < NPSH_{inst}(Q_F). \quad (2.8)$$

Din figura 2.7 se observă că pentru valoarea Q_F obținută, **condiția este verificată**. Pentru $Q_F = 0,0182 \text{ m}^3/\text{s}$, rezultă: $NPSH(Q_F) = 2 - 20 Q_F + 14000 Q_F^2 = 6,27 \text{ m}$ cerut la aspirația pompei, față de $NPSH_{inst}(Q_F) = 13,83 - 15000 Q_F^2 = 8,86 \text{ m}$ disponibil în instalație. Deci, **condiția (2.8) este îndeplinită**, în consecință **pompa centrifugă studiată funcționează fără cavitație**.

O **condiție similară pentru funcționarea fără cavitație** este (1.36): $Q_F < Q_{lim}$ (punctul de funcționare energetică **F** trebuie să fie în stânga punctului de funcționare cavitațională **C**, poziție care se verifică în figura 2.7), cu mențiunea că într-o marjă de $\pm 3\%$ din Q_{lim} , poate să apară incipiența cavitațională. Deci condiția (1.36) devine:

$$Q_F < 0,97 Q_{lim}. \quad (2.9)$$

Pentru $Q_F = 0,0182 \text{ m}^3/\text{s}$ și $Q_{lim} = 0,0205 \text{ m}^3/\text{s}$, **condiția (2.9) este îndeplinită**, deoarece $Q_F < 0,97 Q_{lim} = 0,0199 \text{ m}^3/\text{s}$.

Problema 2.2.2. – Punctul de funcționare cavitațională în cazul unei instalații de pompare cu înălțime geodezică de aspirație pozitivă

Se consideră pompa centrifugă **P**, cu ax orizontal, din figura 2.8, care funcționează la turație nominală. Pe suprafața liberă a rezervorului de aspirație, cota apei este $z_i = 0$ m, viteza apei este $v_i \cong 0$, iar înălțimea dată de presiunea absolută este $p_i/\rho g = 10$ m. Pe suprafața liberă a rezervorului de refulare, cota apei este $z_e = 5$ m, viteza apei este $v_e \cong 0$, iar înălțimea dată de presiunea absolută este $p_e/\rho g = 30$ m. La aspirația pompei, cota centrului secțiunii de aspirație a pompei (cota punctului *a*) este $z_a = 4,5$ m. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$. Presiunea absolută de vaporizare a apei la 15°C este $p_v = 12,8 \text{ mmHg} = 1,71 \text{ kPa}$, adică $p_v/\rho g \cong 0,17$ m. Modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație este $M_a = 4000 \text{ s}^2/\text{m}^5$, iar modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare este $M_r = 20000 \text{ s}^2/\text{m}^5$.

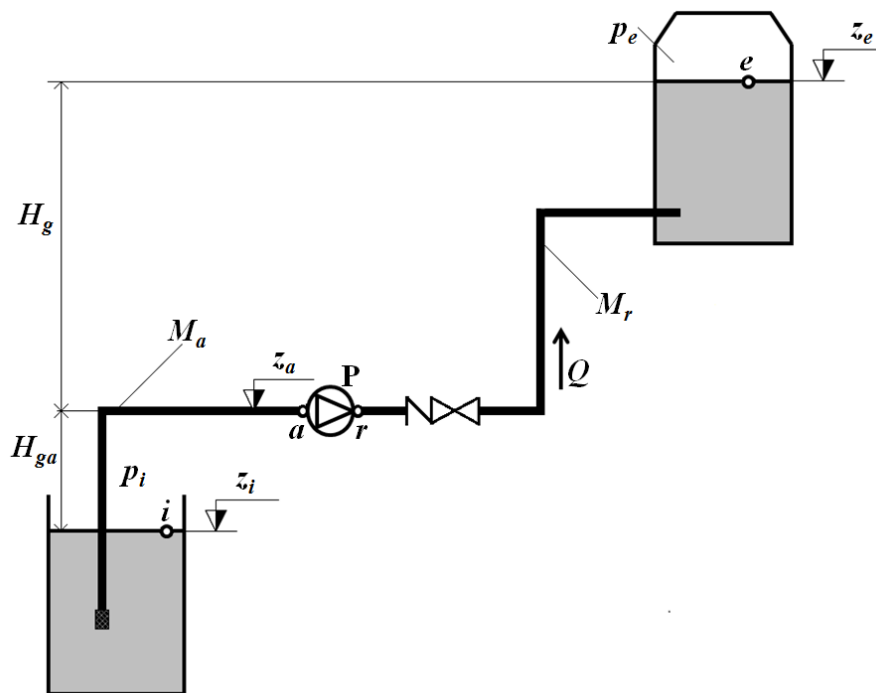


Fig. 2.8. – Schema instalației hidraulice alimentate cu pompă centrifugă

Se cunosc curbele caracteristice ale pompei, definite prin funcții polinomiale de gradul al doilea, care depind de debitul Q în m^3/s , pentru o plajă de variație a debitului $0 \leq Q \leq 0,02 \text{ m}^3/\text{s}$, anume:

- caracteristica energetică a pompei: $H = 50 - 65000 Q^2$ [m];
- caracteristica de randament a pompei: $\eta = 82,5 Q - 2750 Q^2$ [-];
- caracteristica de cavitație a pompei: $NPSH = 2,5 - 10 Q + 8000 Q^2$ [m].

Se cere:

① Să se traseze pe același grafic:

- curbele caracteristice ale pompei: $H = H(Q)$, $\eta = \eta(Q)$ și $NPSH = NPSH(Q)$;
- caracteristica instalației: $H_{inst} = H_{inst}(Q)$;
- curba cavitațională a instalației $NPSH_{inst} = NPSH_{inst}(Q)$;

② Să se poziționeze pe grafic punctul de funcționare energetică **F** al pompei și să se determine prin **calcul analitic** valorile debitului Q_F [m³/s], înălțimii de pompare H_F [m] și randamentului η_F în punctul **F**;

③ Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în kW;

④ Pe baza valorilor obținute pentru NPSH cerut de pompă în **F**, $NPSH(Q_F)$, respectiv pentru NPSH disponibil în instalație în **F**, $NPSH_{inst}(Q_F)$, să se menționeze dacă pompa funcționează fără cavitație la aspirație, sau în regim de cavitație;

⑤ Pentru cazul în care pompa funcționează cu cavitație la aspirație, să se determine valoarea maximă a cotei centrului secțiunii de aspirație a pompei (notată z_{amax}), pentru care pompa funcționează fără cavitație.

Rezolvare:

① Caracteristica energetică $H = (50 - 65000 Q^2)$, caracteristica de randament a pompei $\eta = (82,5 Q - 2750 Q^2)$ și caracteristica de cavitație a pompei $NPSH = (2,5 - 10 Q + 8000 Q^2)$ sunt trasate în figura 2.9, pe întreaga plajă de variație a debitului Q , anume: $0 \leq Q \leq 0,02$ m³/s. Caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ este descrisă de relația (1.33), în care înălțimea statică H_s definită prin (1.22) are valoarea:

$$H_s = \frac{p_e - p_i}{\rho g} + H_g = \frac{p_e - p_i}{\rho g} + (z_e - z_i) = (30 - 10) + (5 - 0) = 25 \text{ m,}$$

iar modulul de rezistență hidraulică al instalației M este calculat ca sumă a modulelor de rezistență aferente conductelor de aspirație și de refulare:

$$M = M_a + M_r = 4000 + 20000 = 24000 \text{ s}^2/\text{m}^5.$$

Cu aceste valori, caracteristica instalației pentru problema considerată este definită astfel:

$$H_{inst} = H_s + MQ^2 = 25 + 24000 Q^2. \quad (2.10)$$

Caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definită prin (2.10), este trasată grafic în figura 2.9.

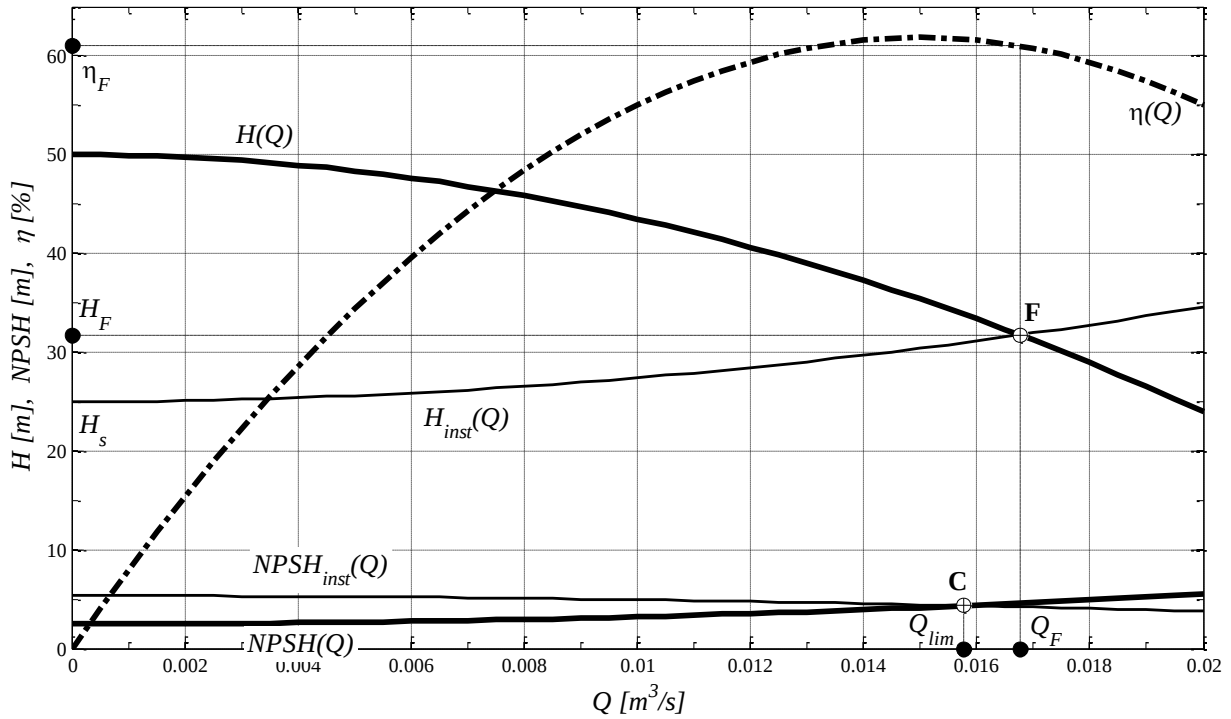


Fig. 2.9. – Punctul de funcționare energetică **F** și punctul de funcționare cavitațională **C** (punctul **F** se află la dreapta punctului **C**, deci pompa cavitează)

Înălțimea geodezică de aspirație a pompei H_{ga} este definită prin (1.19) și, pentru cazul studiat aici, are valoare pozitivă:

$$H_{ga} = z_a - z_i = 4,5 - 0 = 4,5 \text{ m.}$$

Curba cavitațională a instalației $NPSH_{inst} = NPSH_{inst}(Q)$ este descrisă de relația (1.35), care în cazul de față se scrie:

$$\begin{aligned} NPSH_{inst} &= \frac{p_{absi} - p_v}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} - H_{ga} - M_a Q^2 = \\ &= (10 - 0,17) + 0 - 4,5 - 4000 Q^2 = 5,33 - 4000 Q^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Curba cavitațională a instalației $NPSH_{inst} = NPSH_{inst}(Q)$, definită cu relația (2.11), este trasată grafic în figura 2.9.

② În figura 2.9, punctul de funcționare energetică **F** este situat la intersecția dintre caracteristica energetică a pompei $H = H(Q)$ și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definită prin (2.10). Valorile debitului Q_F [m^3/s], înălțimii de pompare H_F [m] și randamentului η_F [-], corespunzătoare punctului **F**, pot fi **determinate analitic**, deoarece dispunem de funcții polinomiale simple care descriu aceste curbe caracteristice.

În punctul **F** sunt intersectate două curbe, descrise prin polinoame de gradul al doilea, deci în **F** se poate scrie următorul sistem de ecuații:

$$H_F = 50 - 65000 Q_F^2 = 25 + 24000 Q_F^2, \quad (2.12)$$

a cărei soluție este:

$$Q_F = \sqrt{\frac{50 - 25}{24000 + 65000}} = 0,0168 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Cu această valoare a debitului Q_F , pentru oricare dintre cele două ecuații din (2.12), se obține înălțimea de pompare H_F , de exemplu:

$$H_F = 50 - 65000 Q_F^2 = 50 - 65000 \cdot 0,0168^2 = 31,74 \text{ m}.$$

Din ecuația care descrie caracteristica de randament, rezultă valoarea randamentului agregatului de pompare η_F în punctul **F**:

$$\eta_F = 82,5 Q_F - 2750 Q_F^2 = 0,61.$$

③ Puterea electrică consumată pentru pompare P_F este definită prin relația (1.34):

$$P_F = \frac{\rho g Q_F H_F}{\eta_F} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0168 \cdot 31,74}{0,61} = 8741,5 \text{ W} \cong 8,7 \text{ kW}.$$

④ Pentru funcționarea pompei fără cavitație, trebuie îndeplinită condiția (1.23), în care valorile de NPSH sunt calculate pentru Q_F , ca în (2.8): $NPSH(Q_F) < NPSH_{inst}(Q_F)$.

Pentru $Q_F = 0,0168 \text{ m}^3/\text{s}$, rezultă: $NPSH(Q_F) = 2,5 - 10 Q_F + 8000 Q_F^2 = 4,58 \text{ m}$ cerut la aspirația pompei, față de $NPSH_{inst}(Q_F) = 5,33 - 4000 Q_F^2 = 4,20 \text{ m}$ disponibil în instalație. Deoarece rezultă $NPSH(Q_F) > NPSH_{inst}(Q_F)$, **condiția (2.8) nu este îndeplinită**, în consecință **pompa centrifugă studiată funcționează cu cavitație**.

⑤ Din condiția (2.9), scrisă pentru debitul Q_{lim2} pentru care pompa funcționează fără cavitație la aspirație, anume:

$$Q_F < 0,97 Q_{lim2}, \quad (2.13)$$

rezultă valoarea limită a debitului $Q_{lim2} > Q_F/0,97 = 0,0173 \text{ m}^3/\text{s}$. Punctul de funcționare cavitațională C_2 al pompei montate la cota z_{amax} se află pe caracteristica de cavitație a pompei, la valoarea NPSH egală cu:

$$NPSH(Q_{lim2}) = 2,5 - 10 Q_{lim2} + 8000 Q_{lim2}^2 = 4,72 \text{ m}.$$

Prin același punct C_2 , trebuie să treacă la limită curba cavitațională a instalației $NPSH_{inst2} = NPSH_{inst2}(Q)$, definită printr-o relație de forma (2.11), în care însă înălțimea geodezică de aspirație a pompei $H_{ga} = (z_{amax} - z_i)$ este necunoscută. Se scrie deci egalitatea: $NPSH(Q_{lim2}) = NPSH_{inst2}(Q_{lim2}) = 4,72 \text{ m}$:

$$NPSH_{inst2}(Q_{lim2}) = \frac{p_{absi} - p_v}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} - z_{amax} + z_i - M_a Q_{lim2}^2 = . \quad (2.14)$$

$$= (10 - 0,17) + 0 - z_{amax} + 0 - 4000 \cdot 0,0173^2 = 4,72 \text{ m}$$

Din relația (2.14), rezultă $z_{amax} = 3,91 \text{ m}$. Din condiția $Q_{lim2} > 0,0173 \text{ m}^3/\text{s}$, rezultă că **pentru evitarea cavitației, este necesar ca pompa să fie montată cu centrul flanșei de aspirație la cota $z_a < z_{amax}$.**

2.3. Funcționarea unei turbopompe cu turație variabilă

Problema 2.3.1. – Determinarea randamentului la care funcționează o pompă centrifugă acționată cu turație diferită de turația nominală

Se consideră pompa centrifugă **P**, montată în instalația hidraulică din figura 2.10. Pompa este antrenată de un motor cu turație variabilă și funcționează la o turație n , mai mică decât turația nominală n_0 , anume: $n = 0,9n_0$. Înălțimea statică este $H_s = 20 \text{ m}$. Modulul de rezistență hidraulică totală al instalației este $M = 37000 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Fabricantul pompei pune la dispoziția utilizatorilor **curbele caracteristice ale pompei la turația nominală n_0** , anume: caracteristica energetică a pompei centrifuge $H_0 = H_0(Q_0)$ și caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$, date **sub formă tabelară** (vezi tabelul 2.7), pe perechi de valori $\{Q_0, H_0\}$, respectiv $\{Q_0, \eta_0\}$, pentru 6 valori discrete ale debitului $Q_0 \in [0; 25] \text{ l/s}$, adică $Q_0 \in [0; 0,025] \text{ m}^3/\text{s}$.

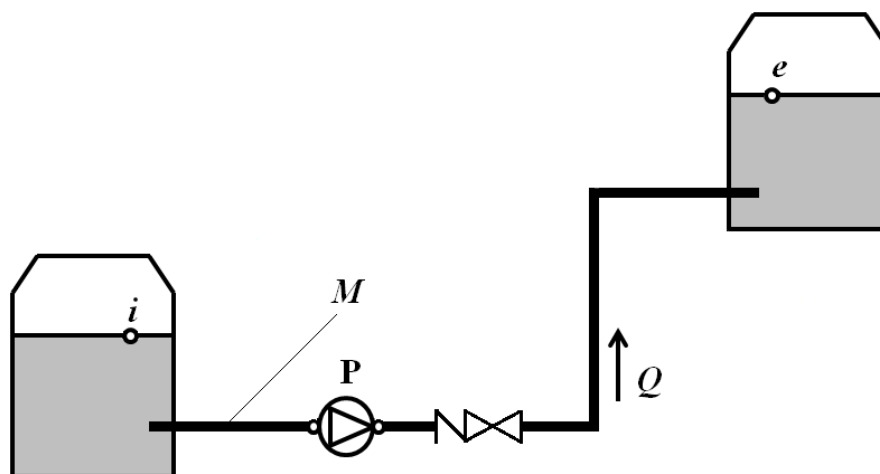


Fig. 2.10. – Schema instalației hidraulice cu pompă centrifugă cu turație variabilă

Tabel 2.7. – Perechile de valori $\{Q_0, H_0\}$ și $\{Q_0, \eta_0\}$ ale curbelor caracteristice ale pompei la turația nominală n_0

Q_0 [l/s]	0	5	10	16	21	25
Q_0 [m ³ /s]	0	0,005	0,01	0,016	0,021	0,025
H_0 [m]	46	45,27	43,07	38,49	33,06	27,66
η_0 [–]	0	0,267	0,457	0,585	0,609	0,573

Se cere:

① Să se traseze pe același grafic:

- curbele caracteristice ale pompei la turația nominală n_0 : $H_0 = H_0(Q_0)$ și $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$;
- curba caracteristică energetică $H = H(Q)$ a pompei la turația $n = 0,9n_0$;
- caracteristica instalației: $H_{inst} = H_{inst}(Q)$;

② Să se poziționeze pe grafic punctul de funcționare energetică **F** al pompei la turația $n = 0,9n_0$ și să se determine valorile debitului Q_F [m³/s] și înălțimii de pompare H_F [m]. Să se poziționeze pe grafic punctul omolog de funcționare **F_{omolog}**, adică punctul de pe caracteristica energetică la turația nominală n_0 , omolog lui **F**. Să se determine valoarea randamentului η_F în **F**;

③ Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în kW.

Rezolvare

① Curbele caracteristice $H_0 = H_0(Q_0)$ și $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ sunt trasate în figura 2.11.

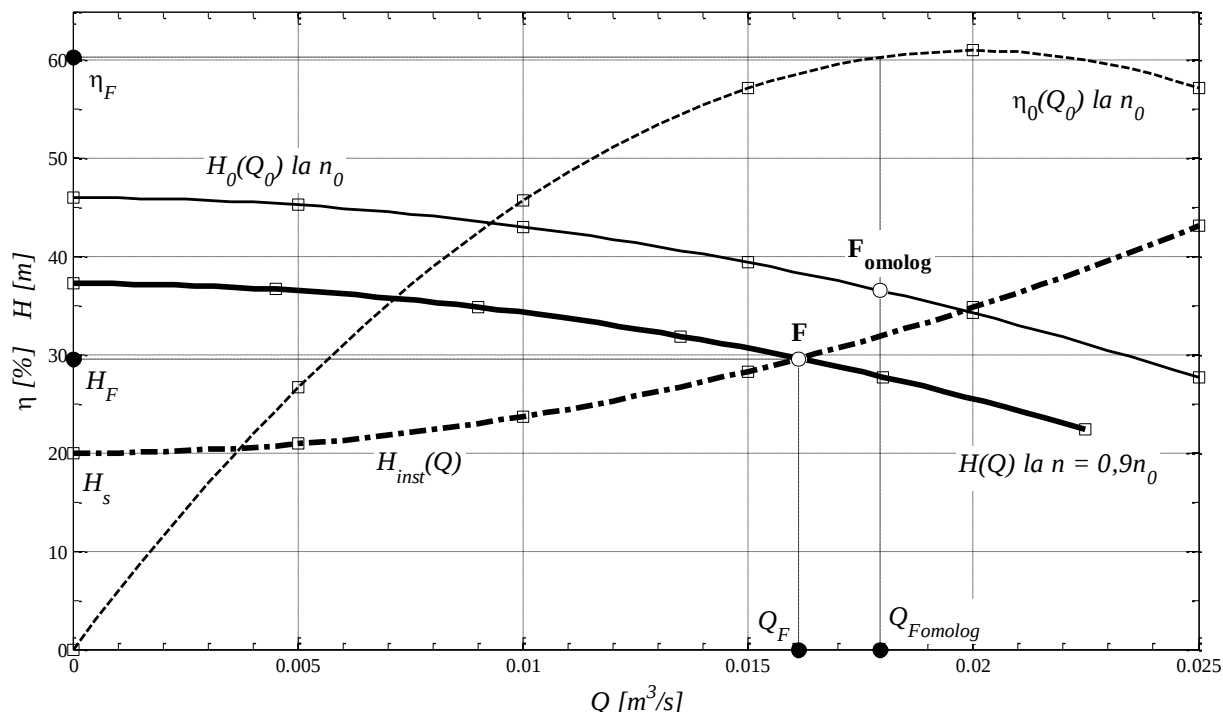


Fig. 2.11. – Punctul de funcționare energetică F al pompei acționată cu turația $n = 0,9n_0$

Plecând de la cele 6 perechi de valori $\{Q_0, H_0\}$ cunoscute la turația nominală n_0 , date în tabelul 2.7, pe baza relațiilor de similitudine (1.37) și (1.38) pot fi obținute perechile de valori $\{Q, H\}$ la turația n :

$$Q = \frac{n}{n_0} Q_0, \quad (2.15)$$

$$H = \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 H_0, \quad (2.16)$$

unde, în problema de față, raportul turațiilor este: $n/n_0 = 0,9$. Cele 6 perechi de valori $\{Q, H\}$ calculate cu relațiile de similitudine (2.15) și (2.16) sunt prezentate în tabelul 2.8. Caracteristica energetică $H = H(Q)$ este trasată în figura 2.11.

Caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ este descrisă de relația (1.33), care aici se scrie:

$$H_{inst} = H_s + MQ^2 = 20 + 37000 Q^2. \quad (2.17)$$

Pentru 6 valori discrete ale debitului Q în m^3/s , cuprinse în intervalul $Q \in [0; 0,025] \text{m}^3/\text{s}$, în tabelul 2.9 sunt trecute perechile de valori $\{Q, H_{inst}\}$, definite prin (2.17). Reprezentarea grafică a caracteristicii instalației (2.17) este efectuată în figura 2.11.

Tabel 2.8. – Valorile $\{Q, H\}$ ale caracteristicii energetice a pompei la turația $n = 0,9n_0$

$Q [\text{m}^3/\text{s}]$	0	0,0045	0,009	0,0135	0,018	0,0225
$H [\text{m}]$	37,26	36,67	34,88	31,91	27,75	22,40

Tabel 2.9. – Perechile de valori $\{Q, H_{inst}\}$ ale caracteristicii instalației

$Q [\text{m}^3/\text{s}]$	0	0,005	0,01	0,016	0,021	0,025
$H_{inst} [\text{m}]$	20	20,93	23,7	29,47	36,32	43,13

② Punctul de funcționare energetică **F** al pompei antrenate cu turația $n = 0,9n_0$ este situat (vezi figura 2.11) la intersecția dintre caracteristica energetică $H = H(Q)$ și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$. Valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F , corespunzătoare punctului **F**, pot fi **citite direct pe axele diagramei** din figura 2.11, la capătul liniilor indicatoare punctate, orizontale și verticale, care pleacă din **F**. Rezultă următoarele valori: debitul $Q_F = 0,016 \text{m}^3/\text{s}$ și înălțimea de pompare $H_F \cong 29,5 \text{m}$.

Randamentul la altă turație decât cea nominală poate fi determinat pe baza **punctului omolog de funcționare**, notat **F_{omolog}** – un punct situat pe caracteristica de sarcină $H_0 = H_0(Q_0)$ la turația nominală n_0 . Astfel, pentru determinarea randamentului η_F , se calculează debitul $Q_{Fomolog}$ corespunzător punctului omolog **F_{omolog}**, utilizând relația de similitudine pentru debite (1.37):

$$Q_{Fomolog} = \frac{n_0}{n} Q_F = \frac{1}{0,9} 0,016 = 0,0178 \text{m}^3/\text{s}.$$

Pentru această valoare a debitului $Q_{Fomolog}$, corespunzătoare punctului **F_{omolog}**, se citește randamentul $\eta_{Fomolog}$ pe caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ din figura 2.11 și rezultă randamentul $\eta_{Fomolog} \cong 0,605$ (valoarea randamentului în procente, citită pe graficul din figura 2.11, fiind $\eta_{Fomolog} \cong 60,5\%$).

Deoarece modificarea turației se face la $n = 0,9n_0$ adică în intervalul de 20% din turația nominală, se poate considera $\eta_F = \eta_{F_{omolog}}$.

③ Puterea electrică consumată pentru pompare P_F este definită prin relația (1.34):

$$P_F = \frac{\rho g Q_F H_F}{\eta_F} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,016 \cdot 29,5}{0,605} = 7801,7 \text{ W} \cong 7,8 \text{ kW}.$$

Problema 2.3.2. – Determinarea turației cu care trebuie acționată o pompă centrifugă, astfel încât aceasta să asigure debitul cerut (sau înălțimea de pompare cerută)

Se consideră pompa centrifugă **P**, montată în instalația hidraulică din figura 2.10. Pompa este antrenată de un motor cu turație variabilă și funcționează la o turație n oarecare. Înălțimea statică este $H_s = 20 \text{ m}$. Modulul de rezistență hidraulică al instalației este $M = 37000 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Fabricantul pompei pune la dispoziția utilizatorilor **curbele caracteristice ale pompei la turația nominală** n_0 (aici $n_0 = 1450 \text{ rot/min}$), anume: caracteristica energetică a pompei centrifuge $H_0 = H_0(Q_0)$ și caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$, date **sub formă tabelară** în tabelul 2.7, pe perechi de valori $\{Q_0, H_0\}$, respectiv $\{Q_0, \eta_0\}$, pentru valori discrete ale debitului $Q_0 \in [0; 0,025] \text{ m}^3/\text{s}$.

Pompa trebuie să asigure în instalație o valoare impusă a debitului, anume: $Q_F = 0,01 \text{ m}^3/\text{s}$, unde **F** reprezintă punctul de funcționare energetică impus. Valoarea Q_F poate fi obținută când pompa este antrenată cu o anumită turație n (necunoscută).

Se cere:

① Să se traseze pe același grafic curbele caracteristice ale pompei la turația nominală n_0 , anume $H_0 = H_0(Q_0)$ și $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$, precum și caracteristica instalației: $H_{inst} = H_{inst}(Q)$;

② Să se poziționeze pe grafic punctul de funcționare energetică **F** al pompei la turația n necunoscută. Să se determine valoarea înălțimii de pompare H_F [m]. Să se poziționeze pe grafic punctul omolog de funcționare **F_{omolog}**, adică punctul în care regimul de funcționare al pompei este similar celui din **F**. Să se determine valoarea turației n cu care trebuie antrenată pompa, precum și valoarea randamentului η_F în punctul de funcționare energetică **F**;

③ Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în kW.

Rezolvare

① Curbele caracteristice $H_0 = H_0(Q_0)$ și $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ sunt trasate în figura 2.12.

Caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ este descrisă de relația (2.17):

$$H_{inst} = H_s + MQ^2 = 20 + 37000 Q^2.$$

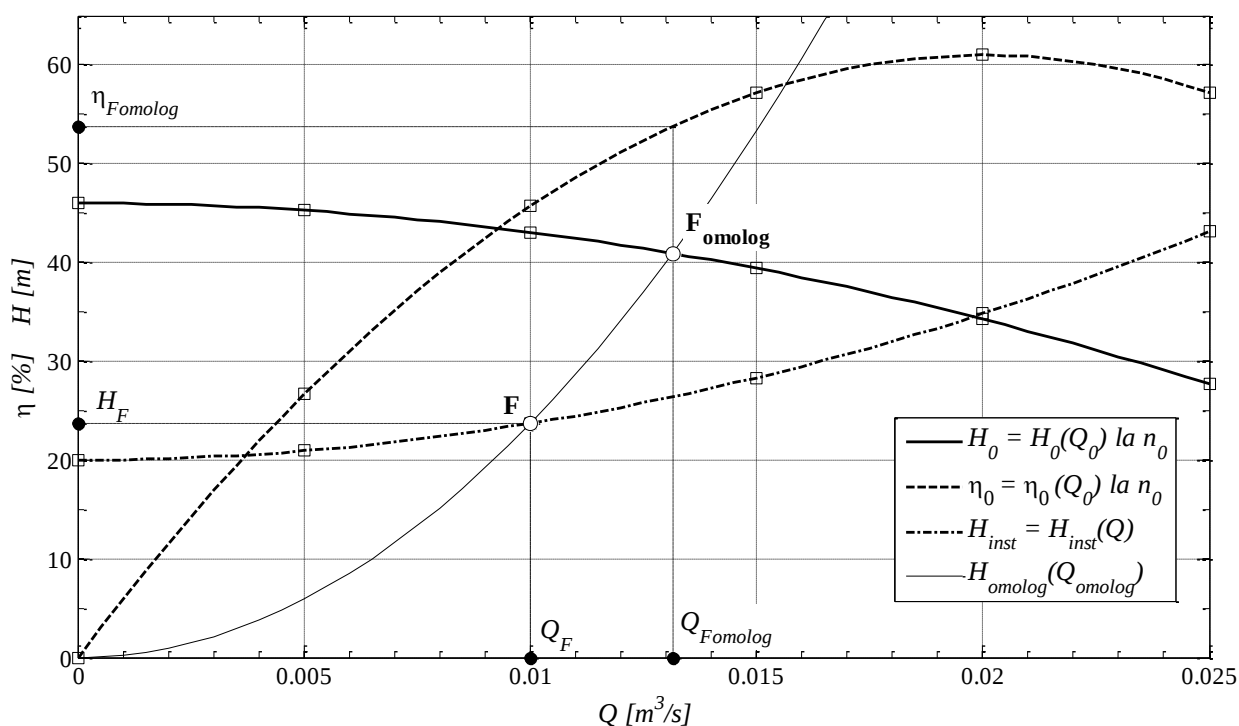


Fig. 2.12. – Punctul de funcționare energetică **F** impus, aferent pompei acționate cu turația necunoscută $n \neq n_0$ (aici $n < n_0$)

În tabelul 2.9 sunt trecute perechile de valori $\{Q, H_{inst}\}$ definite prin (2.17), pentru valori discrete ale debitului $Q \in [0; 0,025] \text{ m}^3/\text{s}$. Reprezentarea grafică a caracteristicii instalației (2.17) este efectuată în figura 2.12.

② În cazul în care se impune vehicularea prin instalație a debitului Q_F (aici $Q_F = 0,01 \text{ m}^3/\text{s}$), punctul de funcționare energetică **F** al pompei (figura 2.12) la turația n necunoscută este situat la intersecția dintre verticala dusă prin Q_F și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$.

Dacă parametrul care trebuie realizat la turația n ar fi înălțimea de pompare H_F , punctul de funcționare energetică **F al pompei la turația n necunoscută ar fi situat la intersecția dintre orizontala dusă prin H_F și caracteristica instalației.**

Pentru oricare dintre cele două variante posibile prezentate (debit Q_F cerut, sau înălțime de pompare H_F cerută), determinarea punctului de funcționare energetică **F** (vezi figura 2.12) duce la cunoașterea perechii de valori $\{Q_F, H_F\}$, corespunzătoare turației necunoscute n . Pentru datele din prezenta problemă, rezultă următoarele valori ale parametrilor hidraulici din punctul **F**: $Q_F = 0,01 \text{ m}^3/\text{s}$ (valoare impusă) și $H_F \cong 24 \text{ m}$ (valoare citită pe grafic în figura 2.12), iar din poziția punctului **F** în raport cu caracteristica $H_0 = H_0(Q_0)$, se observă că turația căutată este inferioară turației nominale, adică $n < n_0$.

Pentru a putea determina turația n , se scriu relațiile de similitudine (1.37) și (1.38) pentru debitele și înălțimile de pompare corespunzătoare punctului omolog de funcționare **F_{omolog}**, respectiv punctului de funcționare energetică **F**:

$$\begin{cases} \frac{Q_{omolog}}{Q_F} = \frac{n_0}{n} \\ \frac{H_{omolog}}{H_F} = \left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \end{cases} \quad (2.18)$$

Sistemul (2.18) cu două ecuații și trei necunoscute ($n, Q_{omolog}, H_{omolog}$) nu poate fi rezolvat direct, însă prin eliminarea raportului turațiilor între cele două ecuații, se obține:

$$H_{omolog} = \left(\frac{H_F}{Q_F^2}\right) Q_{omolog}^2 = C Q_{omolog}^2, \quad (2.19)$$

unde constanta are valoarea $C = H_F / Q_F^2 = 24 / 0,01^2 = 2,4 \cdot 10^5 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Parabola definită prin (2.19) este **parabola punctelor omoloage lui F** în planul $\{Q, H\}$, iar la intersecția acesteia cu caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ a pompei, se obține **punctul omolog F_{omolog}**, în dreptul căruia se citește pe abscisă valoarea debitului $Q_{Fomolog} = 0,0131 \text{ m}^3/\text{s}$. Introducând valoarea $Q_{Fomolog}$ în prima ecuație a sistemului (2.18), rezultă raportul turațiilor

$$\frac{n}{n_0} = \frac{Q_F}{Q_{Fomolog}} = \frac{0,01}{0,0131} \cong 0,76 \quad (2.20)$$

turația n având valoarea: $n \cong 0,76n_0 = 0,76 \cdot 1450 = 1102 \text{ rot/min}$.

Deoarece $n < 0,8n_0$, se determină (se citește) mai întâi valoarea randamentului $\eta_{Fomolog}$ corespunzător debitului $Q_{Fomolog}$ pe caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ din figura 2.12 și rezultă valoarea $\eta_{Fomolog} \cong 54\%$, adică $\eta_{Fomolog} \cong 0,54$. Apoi, randamentul η_F

corespunzător punctului de funcționare energetică **F** se determină cu ajutorul **relației de corecție** (1.42), aplicată lui $\eta_{F_{omolog}}$:

$$\eta_F = 1 - \left(1 - \eta_{F_{omolog}}\right) \left(\frac{n_0}{n}\right)^{0,1} = 1 - (1 - 0,54) \left(\frac{1}{0,76}\right)^{0,1} = 0,527$$

care se poate exprima și în procente: $\eta_F = 52,7\%$.

Se observă că $\eta_F < \eta_{F_{omolog}}$, eroarea relativă dintre cele două valori fiind:

$$\varepsilon_r = \frac{\eta_F - \eta_{F_{omolog}}}{\eta_F} 100 = -2,47\%.$$

③ Puterea electrică consumată pentru pompare P_F este definită prin relația (1.34):

$$P_F = \frac{\rho g Q_F H_F}{\eta_F} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,01 \cdot 24}{0,527} = 4554,1 \text{ W} \cong 4,6 \text{ kW}.$$

2.4. Funcționarea turbopompelor cuplate în serie

Problema 2.4.1. – Funcționarea pompelor centrifuge identice cuplate în serie

Se consideră două pompe centrifuge identice, notate **P₁** și **P₂**, montate în serie în instalația hidraulică din figura 2.13. Ambele pompe funcționează la turație nominală.

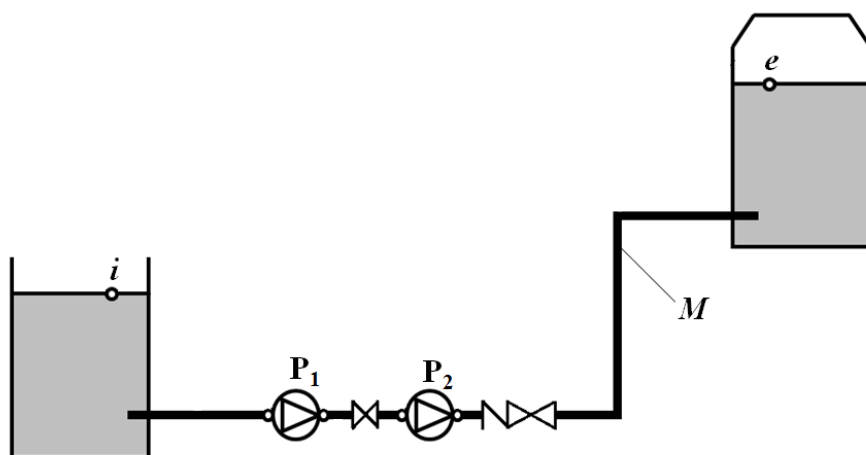


Fig. 2.13. – Schema instalației hidraulice cu două pompe centrifuge montate în serie

Înălțimea statică este $H_s = 35 \text{ m}$. Modulul de rezistență hidraulică totală al instalației este $M = 60000 \text{ s}^2/\text{m}^5$.

Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$. Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică a pompei $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă tabelară** în tabelul 2.10, pe perechi de valori $\{Q_j, H_j\}$, respectiv $\{Q_j, \eta_j\}$, pentru valori discrete ale debitului $Q_j \in [0; 0,025] \text{ m}^3/\text{s}$.

Tabel 2.10. – Perechile de valori $\{Q_1, H_1\} \equiv \{Q_2, H_2\}$ și $\{Q_1, \eta_1\} \equiv \{Q_2, \eta_2\}$ ale curbelor caracteristice ale pompelor

$Q_1 = Q_2 \text{ [m}^3/\text{s]}$	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025
$H_1 = H_2 \text{ [m]}$	37	35,8	32,4	26,5	18,4	8
$\eta_1 = \eta_2 \text{ [%]}$	0	32	51	57	50	30

Se cere:

① Să se traseze pe același grafic:

- curbele caracteristice ale unei pompe, de exemplu ale pompei $\mathbf{P}_1$ (care este identică cu pompa $\mathbf{P}_2$): $H_1 = H_1(Q_1)$ și $\eta_1 = \eta_1(Q_1)$;
- caracteristica energetică $H_{cs} = H_{cs}(Q)$ a ansamblului de pompe cuplate în serie;
- caracteristica instalației: $H_{inst} = H_{inst}(Q)$;

② Să se poziționeze pe grafic punctul de funcționare energetică $\mathbf{F}$ al cuplajului în serie al celor două pompe. Să se determine valorile debitului $Q_F \text{ [m}^3/\text{s]}$ și înălțimii de pompare $H_F \text{ [m]}$, în punctul $\mathbf{F}$. Să se poziționeze pe grafic punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, care coincid în cazul pompelor identice: $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_2$. Să se determine valorile debitelor $Q_{F1} = Q_{F2} \text{ [m}^3/\text{s]}$, înălțimilor de pompare $H_{F1} = H_{F2} \text{ [m]}$ și randamentelor $\eta_{F1} = \eta_{F2} \text{ [-]}$, în punctele $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_2$;

③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , în kW.

Rezolvare

① Curbele caracteristice $H_1 = H_1(Q_1)$ și $\eta_1 = \eta_1(Q_1)$ sunt trasate în figura 2.14. Caracteristica energetică $H_{cs} = H_{cs}(Q)$ a ansamblului de pompe cuplate în serie se obține prin ”adunarea pe verticală a curbelor” caracteristice energetice ale pompelor: $H_1(Q_1)$ și $H_2(Q_2)$, care în această

problemă sunt identice. Această procedură de ”adunare pe verticală a două curbe” presupune că pentru o anumită valoare constantă a debitului, $Q = \text{const.}$, se calculează:

$$H_{cs}(Q) = H_1(Q) + H_2(Q) = 2H_1(Q). \quad (2.21)$$

În tabelul 2.11 sunt trecute perechile de valori $\{Q, H_{cs}\}$ definite prin (2.21), pentru valori discrete ale debitului $Q \in [0; 0,025] \text{ m}^3/\text{s}$. Caracteristica energetică $H_{cs} = H_{cs}(Q)$ a ansamblului celor două pompe identice cuplate în serie este trasată în figura 2.14.

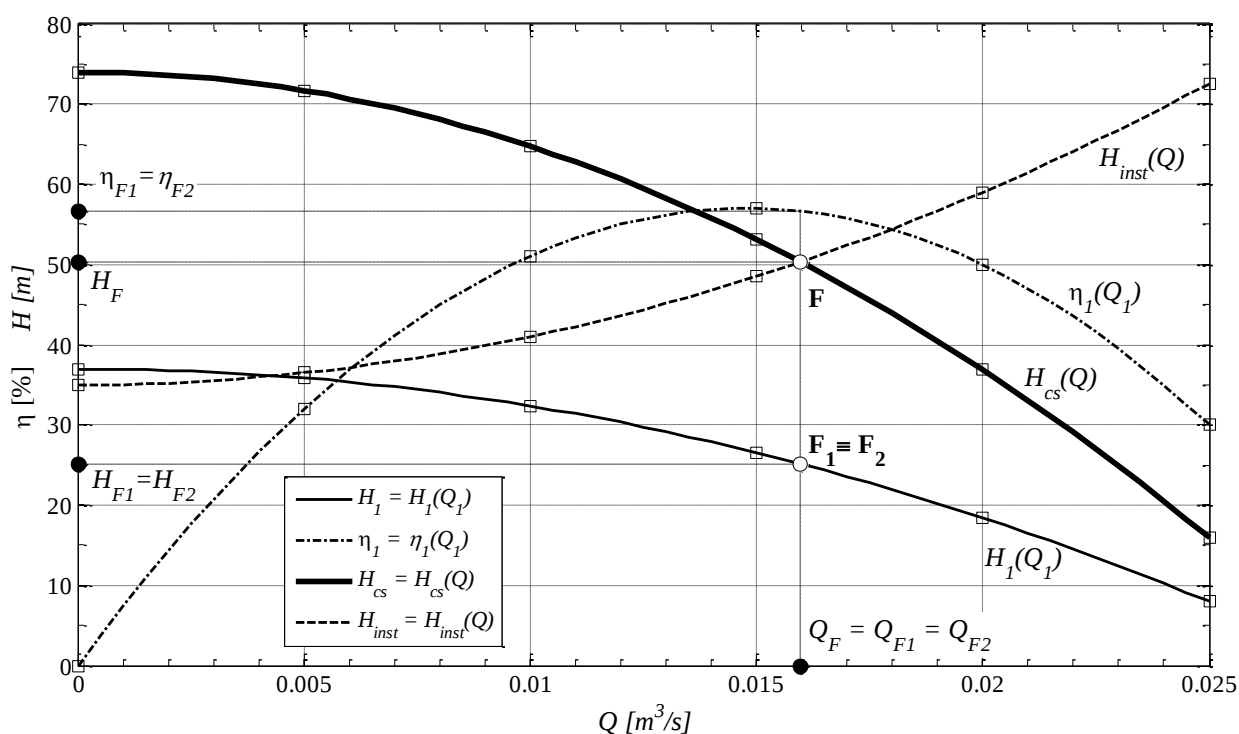


Fig. 2.14. – Punctul de funcționare energetică F al cuplajului în serie al celor două pompe identice și punctele de funcționare energetică F_1 și F_2 ale pompelor

Tabel 2.11. – Perechile de valori $\{Q, H_{cs}\}$ și $\{Q, H_{inst}\}$ calculate

Q [m^3/s]	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025
H_{cs} [m]	74	71,6	64,8	53	36,8	16
H_{inst} [m]	35	36,5	41	48,5	59	72,5

Caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ este descrisă de relația (1.33), care pentru datele din această problemă devine:

$$H_{inst} = H_s + MQ^2 = 35 + 60000 Q^2. \quad (2.22)$$

În tabelul 2.11 sunt trecute perechile de valori $\{Q, H_{inst}\}$ definite prin (2.22), pentru valori discrete ale debitului $Q \in [0; 0,025] \text{ m}^3/\text{s}$. Reprezentarea grafică a caracteristicii instalației (2.22) este efectuată în figura 2.14.

② În figura 2.14, **punctul de funcționare energetică F al cuplajului în serie** al celor două pompe este situat la intersecția dintre caracteristica energetică $H_{cs} = H_{cs}(Q)$ a cuplajului în serie și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definită prin (2.22).

Valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F , corespunzătoare punctului **F**, pot fi **citate direct pe axele diagramei** din figura 2.14, la capătul liniilor indicatoare punctate, orizontale și verticale, care pleacă din **F**. Rezultă următoarele valori: $Q_F = 0,016 \text{ m}^3/\text{s}$ și $H_F \cong 50,5 \text{ m}$.

Debitul Q_F tranzitează fiecare pompă, deci la intersecția dintre caracteristica energetică a fiecărei pompe $H_j = H_j(Q)$, cu $j \in \{1; 2\}$ și verticala $Q = Q_F$, se obțin **punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe montate în serie**, anume punctul **F**₁ pentru prima pompă, identic cu punctul **F**₂ pentru cea de-a doua pompă (vezi punctele **F**₁ $\equiv$ **F**₂ în figura 2.14). Pentru debite, rezultă deci egalitatea: $Q_{F1} = Q_{F2} = Q_F = 0,016 \text{ m}^3/\text{s}$.

Înălțimea de pompare asigurată de fiecare pompă are valoarea: $H_{F1} = H_{F2} = H_F / 2 = 25,25 \text{ m}$ (valoare care poate fi citită direct pe ordonata diagramei din figura 2.14, la capătul liniei indicatoare punctată, orizontală, care pleacă din **F**₁ $\equiv$ **F**₂).

Pe caracteristica de randament a pompei **P**₁, se citește valoarea randamentului corespunzător funcționării pompei: $\eta_{F1} \cong 57 \%$, deci $\eta_{F1} = 0,57$. Pompele fiind identice, rezultă: $\eta_{F1} = \eta_{F2}$.

③ Puterea electrică P_{Fj} consumată pentru pompare de către fiecare pompă, unde $j \in \{1; 2\}$, este definită prin relația (1.34):

$$P_{Fj} = \frac{\rho g Q_{Fj} H_{Fj}}{\eta_{Fj}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,016 \cdot 25,25}{0,57} = 7087,7 \text{ W} \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}.$$

Puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , este suma puterilor consumate de cele două pompe:

$$P = P_{F1} + P_{F2} = 2P_{F1} = 14175 \text{ W} \cong 14,2 \text{ kW}.$$

Problema 2.4.2. – Funcționarea pompelor centrifuge diferite cuplate în serie

Se consideră două pompe centrifuge diferite, notate P_1 și P_2 , montate în serie într-o instalație hidraulică ca cea din figura 2.13. Ambele pompe funcționează la turație nominală.

Înălțimea statică este $H_s = 55$ m. Modulul de rezistență hidraulică totală al instalației este $M = 77880 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică a pompei $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă tabelară** în tabelul 2.12, pe perechi de valori $\{Q_j, H_j\}$, respectiv $\{Q_j, \eta_j\}$, pentru valori discrete ale debitului $Q_j \in [0; 0,02] \text{ m}^3/\text{s}$.

Tabel 2.12. – Perechile de valori $\{Q_1, H_1\}; \{Q_2, H_2\}$ și $\{Q_1, \eta_1\}; \{Q_2, \eta_2\}$ ale curbelor caracteristice ale pompelor

$Q_1 = Q_2 \text{ [m}^3/\text{s]}$	0	0,005	0,01	0,015	0,02
$H_1 \text{ [m]}$	37	35,8	32,4	26,5	18,4
$\eta_1 \text{ [%]}$	0	32	51	57	50
$H_2 \text{ [m]}$	46	45,3	43	39,4	34,3
$\eta_2 \text{ [%]}$	0	27	46	57	61

Se cere:

① Să se traseze pe același grafic:

- curbele caracteristice ale fiecărei pompe: $H_j = H_j(Q_j)$ și $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$;
- caracteristica energetică $H_{cs} = H_{cs}(Q)$ a ansamblului de pompe cuplate în serie;
- caracteristica instalației: $H_{inst} = H_{inst}(Q)$;

② Să se poziționeze pe grafic punctul de funcționare energetică **F** al cuplajului în serie al celor două pompe. Să se determine valorile debitului $Q_F \text{ [m}^3/\text{s]}$ și înălțimii de pompare $H_F \text{ [m]}$, în punctul **F**. Să se poziționeze pe grafic punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, **F**₁ și **F**₂. Să se determine valorile debitelor $Q_{Fj} \text{ [m}^3/\text{s]}$, înălțimilor de pompare $H_{Fj} \text{ [m]}$ și randamentelor $\eta_{Fj} \text{ [-]}$, cu $j \in \{1; 2\}$, în punctele **F**₁ și **F**₂;

③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , în kW.

Rezolvare

① Curbele caracteristice $H_j = H_j(Q_j)$ și $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt trasate în figura 2.15. Caracteristica energetică $H_{cs} = H_{cs}(Q)$ a ansamblului de pompe cuplate în serie se obține prin "adunarea pe verticală a curbelor" caracteristice energetice ale pompelor: $H_1(Q_1)$ și $H_2(Q_2)$. Această procedură de "adunare pe verticală a două curbe" presupune că pentru o anumită valoare constantă a debitului, $Q = \text{const.}$, se calculează:

$$H_{cs}(Q) = H_1(Q) + H_2(Q). \quad (2.23)$$

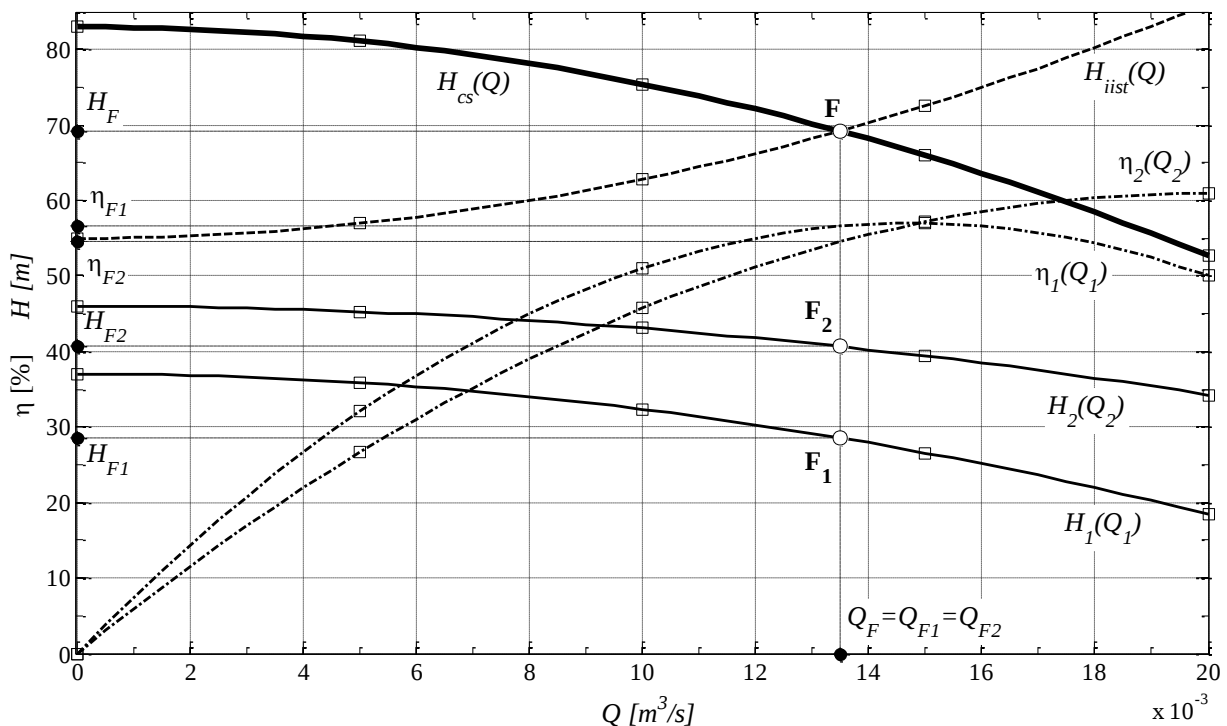


Fig. 2.15. – Punctul de funcționare energetică F al cuplajului în serie al celor două pompe diferite și punctele de funcționare energetică F_1 și F_2 ale pompelor

În tabelul 2.13 sunt trecute perechile de valori $\{Q, H_{cs}\}$ definite prin (2.23), pentru valori discrete ale debitului $Q \in [0; 0,02] \text{ m}^3/\text{s}$. Caracteristica energetică $H_{cs} = H_{cs}(Q)$ a ansamblului celor două pompe diferite cuplate în serie este trasată în figura 2.15.

Caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ este descrisă de relația (1.33), care pentru datele din această problemă devine:

$$H_{inst} = H_s + MQ^2 = 55 + 77880 Q^2. \quad (2.24)$$

În tabelul 2.13 sunt trecute perechile de valori $\{Q, H_{inst}\}$ definite prin (2.24), pentru valori discrete ale debitului $Q \in [0; 0,02] \text{ m}^3/\text{s}$. Reprezentarea grafică a caracteristicii instalației (2.24) este efectuată în figura 2.15.

Tabel 2.13. – Perechile de valori $\{Q, H_{cs}\}$ și $\{Q, H_{inst}\}$ calculate

$Q \text{ [m}^3/\text{s]}$	0	0,005	0,01	0,015	0,02
$H_{cs} \text{ [m]}$	83	81,1	75,4	65,9	52,7
$H_{inst} \text{ [m]}$	55	56,95	62,79	72,52	86,15

② În figura 2.15, **punctul de funcționare energetică F al cuplajului în serie** al celor două pompe este situat la intersecția dintre caracteristica energetică $H_{cs} = H_{cs}(Q)$ a cuplajului în serie și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definită prin (2.24).

Valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F , corespunzătoare punctului **F**, pot fi **citite direct pe axele diagramei** din figura 2.15, la capătul liniilor indicatoare punctate, orizontale și verticale, care pleacă din **F**. Rezultă următoarele valori: $Q_F = 0,0135 \text{ m}^3/\text{s}$ și $H_F \cong 69 \text{ m}$.

Debitul Q_F tranzitează fiecare pompă, deci la intersecția dintre caracteristica energetică a fiecărei pompe $H_j = H_j(Q)$, cu $j \in \{1; 2\}$ și verticala $Q = Q_F$, se obțin **punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe montate în serie**, anume punctul **F₁** pentru prima pompă, respectiv punctul **F₂** pentru cea de-a doua pompă (vezi figura 2.15). Pentru debite, rezultă deci egalitatea: $Q_{F1} = Q_{F2} = Q_F = 0,0135 \text{ m}^3/\text{s}$.

Înălțimea de pompare asigurată de fiecare pompă are valoarea: $H_{F1} = 28,5 \text{ m}$, respectiv $H_{F2} = 40,5 \text{ m}$ (aceste valori pot fi citite direct pe ordonata diagramei din figura 2.15, la capătul liniilor indicatoare punctate, orizontale, care pleacă din **F₁**, respectiv **F₂**). Se verifică relația: $H_F = H_{F1} + H_{F2} = 69 \text{ m}$.

Pe caracteristica de randament a fiecărei pompe, se citește valoarea randamentului corespunzător funcționării fiecărei pompe, anume: $\eta_{F1} \cong 57\%$ și $\eta_{F2} \cong 54,5\%$, adică $\eta_{F1} = 0,57$ și $\eta_{F2} = 0,545$.

③ Puterea electrică P_{Fj} consumată pentru pompare de către fiecare pompă, unde $j \in \{1; 2\}$, este definită prin relația (1.34):

$$P_{F1} = \frac{\rho g Q_{F1} H_{F1}}{\eta_{F1}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0135 \cdot 28,5}{0,57} = 6750 \text{ W},$$

$$P_{F2} = \frac{\rho g Q_{F2} H_{F2}}{\eta_{F2}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0135 \cdot 40,5}{0,545} = 10032 \text{ W}.$$

Puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , este suma puterilor consumate de cele două pompe:

$$P = P_{F1} + P_{F2} = 16782 \text{ W} \cong 16,8 \text{ kW}.$$

2.5. Funcționarea turbopompelor cuplate în paralel

Problema 2.5.1. – Funcționarea pompelor centrifuge identice cuplate în paralel (calcul grafo-analitic)

Se consideră două pompe centrifuge identice, notate P_1 și P_2 , montate în paralel în instalația hidraulică din figura 2.16 (în care nodurile **A** și **B** delimitează cuplajul paralel). Ambele pompe funcționează la turație nominală.

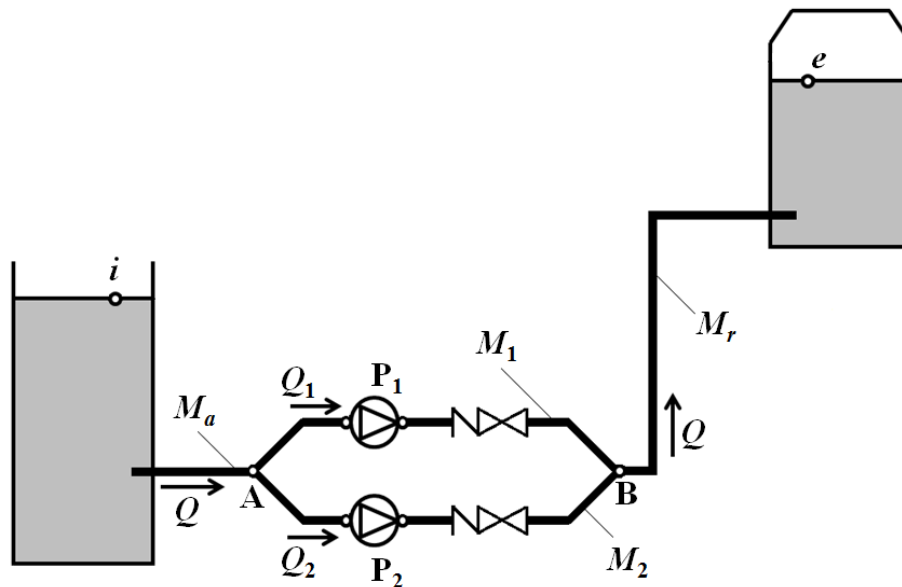


Fig. 2.16. – Schema instalației hidraulice cu două pompe centrifuge montate în paralel

Înălțimea statică este $H_s = 12 \text{ m}$. Modulul de rezistență hidraulică al magistralei de aspirație este $M_a = 5000 \text{ s}^2/\text{m}^5$ (vezi figura 2.16), iar modulul de rezistență hidraulică al magistralei de

refulare este $M_r = 15000 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Pe fiecare traseu hidraulic care leagă nodurile **A** și **B**, modulul de rezistență hidraulică are aceeași valoare, anume: $M_1 = M_2 = 6000 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ a pompei P_j și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă tabelară** în tabelul 2.14, pe perechi de valori $\{Q_j, H_j\}$, respectiv $\{Q_j, \eta_j\}$, pentru valori discrete ale debitului $Q_j \in [0; 0,025] \text{ m}^3/\text{s}$.

Tabel 2.14. – Perechile de valori date: $\{Q_1, H_1\} \equiv \{Q_2, H_2\}$ și $\{Q_1, \eta_1\} \equiv \{Q_2, \eta_2\}$, precum și perechile de valori calculate: $\{Q_1, H_{red1}\} \equiv \{Q_2, H_{red2}\}$

$Q_1 = Q_2 \text{ [m}^3/\text{s]}$	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025
$H_1 = H_2 \text{ [m]}$	37	35,8	32,4	26,5	18,4	8
$\eta_1 = \eta_2 \text{ [%]}$	0	32	51	57	50	30
$H_{red1} = H_{red2} \text{ [m]}$	37	35,65	31,8	25,15	16	4,25

Se cere:

① Să se traseze pe același grafic:

- curba caracteristică energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și curba caracteristică de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$ pentru fiecare pompă, precum și caracteristica energetică redusă $H_{redj} = H_{redj}(Q_j)$ a fiecărei pompe, unde $j \in \{1; 2\}$;
- caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a ansamblului de pompe cuplate în paralel;
- caracteristica instalației: $H_{inst} = H_{inst}(Q)$;

② Să se poziționeze pe grafic punctul de funcționare energetică **F** al cuplajului în paralel al celor două pompe. Să se determine valorile debitului $Q_F \text{ [m}^3/\text{s]}$ și înălțimii de pompare $H_F \text{ [m]}$, în punctul **F**. Să se poziționeze pe grafic punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, **F**₁ și **F**₂. Să se determine valorile debitelor $Q_{F1}, Q_{F2} \text{ [m}^3/\text{s]}$, înălțimilor de pompare $H_{F1}, H_{F2} \text{ [m]}$ și randamentelor $\eta_{F1}, \eta_{F2} \text{ [-]}$, în punctele **F**₁ și **F**₂;

③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , în kW.

Rezolvare

① Curba caracteristică energetică $H_1 = H_1(Q_1)$ și curba caracteristică de randament $\eta_1 = \eta_1(Q_1)$ pentru pompa P_1 sunt trasate în figura 2.17. Aceste curbe sunt identice cu curbele pompei P_2 .

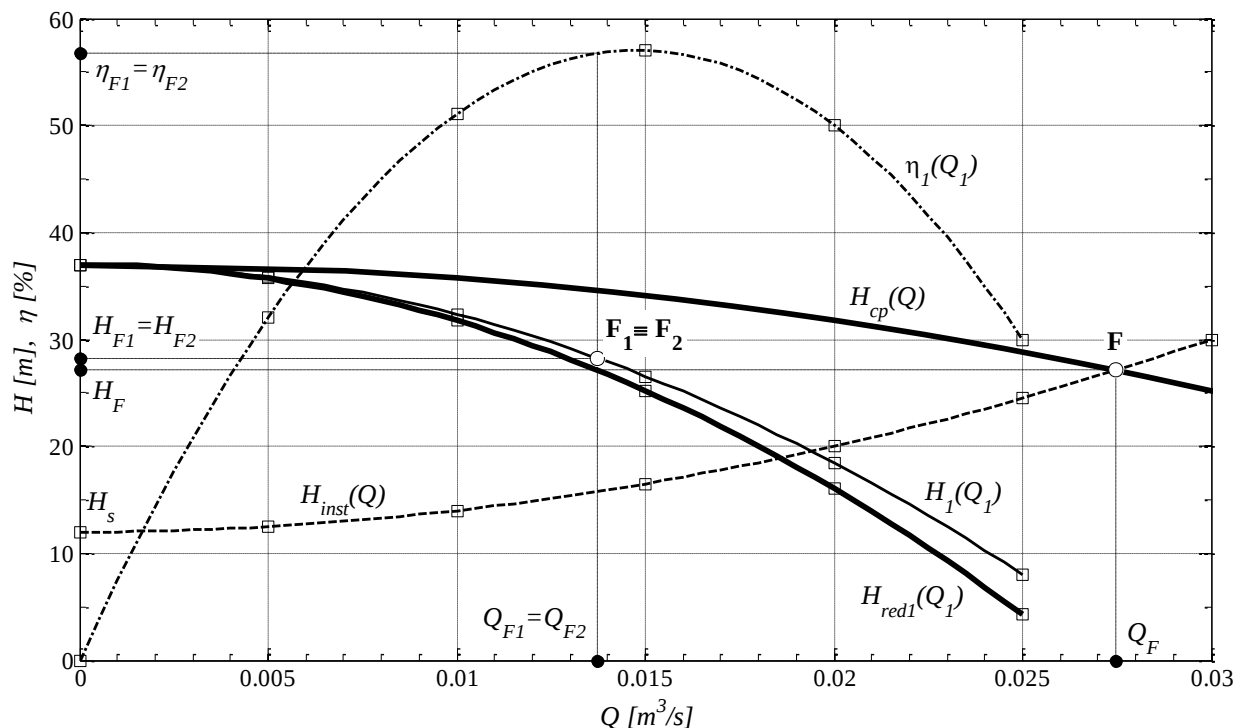


Fig. 2.17. – Punctul de funcționare energetică F al cuplajului în paralel al celor două pompe identice și punctele de funcționare energetică F_1 și F_2 ale pompelor

Caracteristica energetică redusă $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ a pompei P_1 , identică în acest caz cu caracteristica redusă $H_{red2} = H_{red2}(Q_2)$ a pompei P_2 , este definită prin relația (1.58):

$$H_{red1}(Q_1) = H_1(Q_1) - M_1 Q_1^2 = H_1(Q_1) - 6000 Q_1^2. \quad (2.25)$$

În tabelul 2.14 sunt trecute perechile de valori $\{Q_1, H_{red1}\}$ definite prin (2.25), pentru valori discrete ale debitului $Q_1 \in [0; 0,025] m^3/s$. Caracteristica energetică redusă $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ a pompei P_1 este trasată în figura 2.17.

Caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a ansamblului de pompe cuplate în paralel se obține prin ”adunarea pe orizontală a curbelor” caracteristice energetice reduse ale pompelor: $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ și $H_{red2} = H_{red2}(Q_2)$, care în această problemă sunt identice. Această procedură de ”adunare pe orizontală a două curbe” presupune că pentru o anumită valoare

constantă a înălțimii de pompare, $H = \text{const.}$, unde $H \leq H_{redj}(Q_j = 0)$, cu $j \in \{1; 2\}$, se calculează debitul Q vehiculat cu cele două pompe cuplate în paralel, ca sumă a debitelor pompate de către fiecare pompă:

$$Q(H_{cp} = H) = Q_1(H_{red1} = H) + Q_2(H_{red2} = H) = 2Q_1(H_{red1} = H). \quad (2.26)$$

Caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a ansamblului celor două pompe identice cuplate în paralel este trasată în figura 2.17.

Caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ este descrisă de relația (1.33), în care modulul de rezistență hidraulică totală al instalației, notat M , este calculat prin însumarea modulelor de rezistență hidraulică ale conductelor magistrale de aspirație, respectiv de refulare, adică:

$$M = M_a + M_r = 5000 + 15000 = 20000 \text{ s}^2/\text{m}^5.$$

Cu această valoare, caracteristica instalației se scrie:

$$H_{inst} = H_s + MQ^2 = 12 + 20000 Q^2. \quad (2.27)$$

În tabelul 2.15 sunt trecute perechile de valori $\{Q, H_{inst}\}$ definite prin (2.27), pentru valori discrete ale debitului $Q \in [0; 0,03] \text{ m}^3/\text{s}$. Reprezentarea grafică a caracteristicii instalației (2.27) este efectuată în figura 2.17.

Tabel 2.15. – Perechile de valori $\{Q, H_{inst}\}$ calculate

$Q \text{ [m}^3/\text{s]}$	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03
$H_{inst} \text{ [m]}$	12	12,5	14	16,5	20	24,5	30

② În figura 2.17, **punctul de funcționare energetică F al cuplajului în paralel** al celor două pompe este situat la intersecția dintre caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a cuplajului în paralel și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definită prin (2.27).

Valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F , corespunzătoare punctului **F**, pot fi **citite direct pe axele diagramei** din figura 2.17, la capătul liniilor indicatoare punctate, orizontale și verticale, care pleacă din **F**. Rezultă următoarele valori: $Q_F = 0,0275 \text{ m}^3/\text{s}$ și $H_F \cong 27 \text{ m}$.

La intersecția dintre orizontala $H = H_F$ și caracteristica energetică redusă $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ a pompei **P₁**, se obține valoarea debitului vehiculat prin pompă: $Q_{F_1} = 0,0137 \text{ m}^3/\text{s}$ (valoarea

fiind citită pe abscisa diagramei din figura 2.17, la capătul liniei indicatoare punctate, verticale, care pleacă din punctul de intersecție sus-menționat).

În acest caz, caracteristicile reduse ale pompelor fiind identice, rezultă egalitatea: $Q_{F_2} = Q_{F_1}$.

În continuare, se verifică ecuația de continuitate în nodurile **A** și **B** (cu observația că fiind vorba despre **valori citite pe diagramă**, egalitatea va fi aproximativă):

$$Q_{F_1} + Q_{F_2} = 2Q_{F_1} = 2 \cdot 0,0137 \text{ m}^3/\text{s} = 0,0274 \text{ m}^3/\text{s} \cong Q_F.$$

Punctele de funcționare energetică aferente celor două **pompe cuplate în paralel**, anume punctul **F₁** (pentru pompa **P₁**) și punctul **F₂** (pentru pompa **P₂**) **coincid**, adică: **F₁ ≡ F₂** (vezi figura 2.17). Fiecare punct **F_j** se situează pe caracteristica energetică $H_j(Q_j)$ a pompei **P_j**, la intersecția fiecărei caracteristici $H_j(Q_j)$ cu verticala $Q = Q_{F_j}$, unde $j \in \{1; 2\}$. Înălțimile de pompare asigurate de fiecare dintre cele două pompe au aceeași valoare: $H_{F_1} = H_1(Q_{F_1}) = H_{F_2} \cong 28 \text{ m}$ (valoare citită pe ordonata diagramei din figura 2.17, la capătul liniei indicatoare punctate, orizontale, care pleacă din punctul **F₁**). Se observă că se verifică inegalitatea: $H_{F_j} > H_F$, cu $j \in \{1; 2\}$.

Pe caracteristica de randament a pompei **P₁**, se citește valoarea randamentului corespunzător funcționării pompei: $\eta_{F_1} \cong 57\%$, deci $\eta_{F_1} = 0,57$. În acest caz, $\eta_{F_1} = \eta_{F_2}$.

③ Puterea electrică P_{F_j} consumată pentru pompare de către fiecare pompă, unde $j \in \{1; 2\}$, este definită prin relația (1.34):

$$P_{F_j} = \frac{\rho g Q_{F_j} H_{F_j}}{\eta_{F_j}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0137 \cdot 28}{0,57} \cong 6730 \text{ W} \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}.$$

Puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , este suma puterilor consumate de cele două pompe:

$$P = P_{F_1} + P_{F_2} = 2P_{F_1} = 13460 \text{ W} \cong 13,5 \text{ kW}.$$

Problema 2.5.2. – Funcționarea pompelor centrifuge identice cuplate în paralel (calcul analitic)

Se consideră două pompe centrifuge identice, notate **P₁** și **P₂**, montate în paralel într-o instalație hidraulică ca cea din figura 2.16 (în care nodurile **A** și **B** delimitează cuplajul paralel). Ambele pompe funcționează la turație nominală.

Înălțimea statică este $H_s = 12 \text{ m}$. Modulul de rezistență hidraulică al magistralei de aspirație este $M_a = 5000 \text{ s}^2/\text{m}^5$, iar modulul de rezistență hidraulică al magistralei de refulare este $M_r = 15000 \text{ s}^2/\text{m}^5$ (vezi notațiile din figura 2.16). Pe fiecare traseu hidraulic care leagă nodurile **A** și **B**, modulul de rezistență hidraulică are aceeași valoare, anume: $M_1 = M_2 = 6000 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ a pompei $\mathbf{P}_j$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt approximate prin **funcții polinomiale de gradul al doilea**, care depind de debitul Q_j în m^3/s , pentru o plajă de variație a debitului $0 \leq Q_j \leq 0,025 \text{ m}^3/\text{s}$, anume:

- caracteristica energetică a pompei: $H_j = 37 - 46400 Q_j^2$ [m];
- caracteristica de randament a pompei: $\eta_j = 77,05 Q_j - 2602,55 Q_j^2$ [-].

Se cere:

- ① Să se determine prin **calcul analitic** valorile debitului Q_F [m^3/s] și înălțimii de pompare H_F [m], în punctul de funcționare energetică **F** al cuplajului în paralel al celor două pompe;
- ② Să se determine prin **calcul analitic** valorile debitelor Q_{F1} , Q_{F2} [m^3/s], înălțimilor de pompare H_{F1} , H_{F2} [m] și randamentelor η_{F1} , η_{F2} [-], în punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, **F**₁ și **F**₂;
- ③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , în kW.

Rezolvare

① Caracteristica energetică redusă $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ a pompei $\mathbf{P}_1$, identică în acest caz cu caracteristica redusă $H_{red2} = H_{red2}(Q_2)$ a pompei $\mathbf{P}_2$, este definită prin relația (1.58):

$$\begin{aligned} H_{red1}(Q_1) &= H_1(Q_1) - M_1 Q_1^2 = H_1(Q_1) - 6000 Q_1^2 = \\ &= 37 - 46400 Q_1^2 - 6000 Q_1^2 = 37 - 52400 Q_1^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a ansamblului de pompe cuplate în paralel se obține prin "adunarea pe orizontală a curbelor" caracteristice energetice reduse ale pompelor: $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ și $H_{red2} = H_{red2}(Q_2)$, care în această problemă sunt identice. Această procedură de "adunare pe orizontală a două curbe" presupune că pentru o anumită valoare

constantă a înălțimii de pompare, $H = \text{const.}$, unde $H \leq H_{redj}(Q_j = 0)$, cu $j \in \{1; 2\}$, se calculează debitul vehiculat cu cele două pompe cuplate în paralel, ca sumă a debitelor pompate de către fiecare pompă. Astfel, se aleg câteva valori discrete ale înălțimii de pompare $H_{cp} = H = \text{const.}$ Se scrie egalitatea dintre fiecare valoare $H_{cp} = H = \text{const.}$ și sarcina redusă corespunzătoare definită prin relația (2.28):

$$H_{cp} = H = H_{red1}(Q_1) = 37 - 52400 Q_1^2. \quad (2.29)$$

Din (2.29), se extrage valoarea debitului $Q_1(H_{cp})$ corespunzătoare sarcinii $H_{cp} = H = \text{const.}$:

$$Q_1 = \sqrt{\frac{37 - H_{cp}}{52400}}, \quad (2.30)$$

iar din relația (2.26), scrisă aici sub forma:

$$Q_{cp}(H_{cp}) = 2Q_1(H_{cp}) = 2\sqrt{\frac{37 - H_{cp}}{52400}}, \quad (2.31)$$

rezultă valoarea debitului Q_{cp} , aferent caracteristicii energetice $H_{cp} = H_{cp}(Q_{cp})$ a ansamblului celor două pompe identice cuplate în paralel.

Din relația (2.31), se obține **ecuația polinomială de gradul al doilea**, care definește caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a cuplajului în paralel:

$$H_{cp} = 37 - 13100 Q^2. \quad (2.32)$$

Cunoscând modulul de rezistență hidraulică totală al instalației: $M = M_a + M_r = 20000 \text{ s}^2/\text{m}^5$, caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ este descrisă de relația:

$$H_{inst} = H_s + MQ^2 = 12 + 20000 Q^2. \quad (2.33)$$

Punctul de funcționare energetică F al cuplajului în paralel al celor două pompe identice este situat la intersecția dintre caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a cuplajului în paralel, definită prin (2.32) și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definită prin (2.33), deci în punctul F, de coordonate $\{Q_F, H_F\}$, se poate scrie următoarea egalitate:

$$H_F = 37 - 13100 Q_F^2 = 12 + 20000 Q_F^2. \quad (2.34)$$

Din egalitatea (2.34), se obține debitul Q_F în punctul F:

$$Q_F = \sqrt{\frac{37 - 12}{20000 + 13100}} = 0,0275 \text{ m}^3/\text{s},$$

iar, de exemplu, din membrul drept al relației (2.34), se obține înălțimea de pompare H_F în F:

$$H_F = 12 + 20000 Q_F^2 = 12 + 20000 \cdot 0,0275^2 = 27,10 \text{ m.}$$

② La intersecția dintre orizontala $H = H_F$ și caracteristica energetică redusă $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ a pompei P_1 , se obține valoarea debitului Q_{F1} vehiculat prin pompă; în acest **punct de intersecție** se poate scrie egalitatea:

$$H_F = H_{red1}(Q_{F1}) = 37 - 52400 Q_{F1}^2 = 27,10 \text{ m} \quad (2.35)$$

din care se poate calcula debitul Q_{F1} :

$$Q_{F1} = \sqrt{\frac{37 - 27,10}{52400}} = 0,0137 \text{ m}^3/\text{s.}$$

În acest caz, $Q_{F2} = Q_{F1}$.

Punctele de funcționare energetică aferente celor două **pompe cuplate în paralel**, anume punctul F_1 (pentru pompa P_1) și punctul F_2 (pentru pompa P_2) **coincid**, adică: $F_1 \equiv F_2$. Fiecare punct F_j se situează pe caracteristica energetică $H_j(Q_j)$ a pompei P_j , la intersecția fiecărei caracteristici $H_j(Q_j)$ cu verticala $Q = Q_{Fj}$, unde $j \in \{1; 2\}$. Înălțimile de pompare asigurate de fiecare dintre cele două pompe au aceeași valoare, $H_{F1} = H_{F2}$; această valoare H_{Fj} , cu $j \in \{1; 2\}$, se obține din ecuația polinomială dată inițial pentru caracteristica energetică a pompei P_j :

$$H_{Fj} = H_j(Q_{Fj}) = 37 - 46400 Q_{Fj}^2 = 37 - 46400 \cdot 0,0137^2 = 28,24 \text{ m.}$$

Pe baza rezultatelor obținute, se verifică inegalitatea: $H_{Fj} > H_F$, cu $j \in \{1; 2\}$.

În acest caz, randamentul în punctul de funcționare energetică al unei pompe este același pentru ambele pompe: $\eta_{F1} = \eta_{F2}$. Din ecuația polinomială dată inițial pentru caracteristica de randament a pompei P_j , cu $j \in \{1; 2\}$, se obține valoarea randamentului corespunzător funcționării pompei:

$$\eta_{Fj} = 77,05 Q_{Fj} - 2602,55 Q_{Fj}^2 = 77,05 \cdot 0,0137 - 2602,55 \cdot 0,0137^2 = 0,567.$$

③ Puterea electrică P_{Fj} consumată pentru pompare de către fiecare pompă P_j este:

$$P_{Fj} = \frac{\rho g Q_{Fj} H_{Fj}}{\eta_{Fj}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0137 \cdot 28,24}{0,567} = 6839,5 \text{ W} \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}.$$

Puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , este suma puterilor consumate de cele două pompe:

$$P = P_{F1} + P_{F2} = 2P_{F1} = 13679 \text{ W} \cong 13,7 \text{ kW}.$$

Se precizează faptul că **în prezenta problemă 2.5.2. a fost soluționat analitic același caz ca și cel definit în problema 2.5.1., unde metoda de calcul a fost una grafo-analitică.** Cu alte cuvinte, perechile de valori $\{Q_j, H_j\}$ și $\{Q_j, \eta_j\}$, cu $j \in \{1; 2\}$, ale caracteristicilor energetice și de randament din tabelul 2.14, sunt generate cu funcțiile polinomiale date în problema 2.5.2, anume: $H_j = (37 - 46400 Q_j^2)$ [m] și $\eta_j = 100(77,05 Q_j - 2602,55 Q_j^2)$ [%]. În mod evident, există diferențe între rezultatele obținute cu cele două metode. În acest caz particular, în care curbele caracteristice ale pompelor au fost generate cu funcții polinomiale, rezultatele obținute prin utilizarea metodei analitice sunt exacte.

Se subliniază însă că **metoda analitică are dezavantajul** că depinde de existența unor expresii analitice, aferente curbelor de regresie polinomială care descriu curbele caracteristice ale pompelor, care **nu sunt disponibile în realitate.** Aproximarea curbelor caracteristice ale pompelor cu funcții de tipul celor prezentate și apoi rezolvarea analitică duce la erori comparabile cu cele obținute cu metoda grafo-analitică.

Problema 2.5.3. – Funcționarea pompelor centrifuge diferite cuplate în paralel (calcul grafo-analitic)

Se consideră două pompe centrifuge diferite, notate $\mathbf{P}_1$ și $\mathbf{P}_2$, montate în paralel într-o instalație hidraulică ca cea din figura 2.16 (în care nodurile **A** și **B** delimitează cuplajul paralel). Ambele pompe funcționează la turație nominală.

Înălțimea statică este $H_s = 15 \text{ m}$. Modulul de rezistență hidraulică al magistralei de aspirație este $M_a = 3000 \text{ s}^2/\text{m}^5$, iar modulul de rezistență hidraulică al magistralei de refulare este $M_r = 7000 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Pe cele două trasee hidraulice care leagă nodurile **A** și **B** (vezi figura 2.16), modulele de rezistență hidraulică au valorile $M_1 = 6000 \text{ s}^2/\text{m}^5$, respectiv $M_2 = 4000 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe $\mathbf{P}_j$ sunt date **sub formă tabelară**, pe perechi de valori $\{Q_j, H_j\}$, respectiv $\{Q_j, \eta_j\}$, cu $j \in \{1; 2\}$, pentru valori discrete ale debitului Q_j în m^3/s , astfel: caracteristica energetică $H_1 = H_1(Q_1)$ a pompei $\mathbf{P}_1$ și caracteristica de randament

$\eta_1 = \eta_1(Q_1)$, în tabelul 2.16, respectiv caracteristica energetică $H_2 = H_2(Q_2)$ a pompei P_2 și caracteristica de randament $\eta_2 = \eta_2(Q_2)$, în tabelul 2.17.

Tabel 2.16. – Perechile de valori date: $\{Q_1, H_1\}$ și $\{Q_1, \eta_1\}$, precum și perechile de valori calculate: $\{Q_1, H_{red1}\}$

Q_1 [m ³ /s]	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025
H_1 [m]	37	35,8	32,4	26,5	18,4	8
η_1 [%]	0	32	51	57	50	30
H_{red1} [m]	37	35,65	31,8	25,15	16	4,25

Tabel 2.17. – Perechile de valori date: $\{Q_2, H_2\}$ și $\{Q_2, \eta_2\}$, precum și perechile de valori calculate: $\{Q_2, H_{red2}\}$

Q_2 [m ³ /s]	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03
H_2 [m]	46	45,3	43	39,4	34,3	27,7	19,6
η_2 [%]	0	27	46	57	61	57	46
H_{red2} [m]	46	45,2	42,6	38,5	32,7	25,2	16

Se cere:

① Să se traseze pe același grafic:

- curba caracteristică energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și curba caracteristică de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$ pentru fiecare pompă, precum și caracteristica energetică redusă $H_{redj} = H_{redj}(Q_j)$ a fiecărei pompe, unde $j \in \{1; 2\}$;
- caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a ansamblului de pompe cuplate în paralel;
- caracteristica instalației: $H_{inst} = H_{inst}(Q)$;

② Să se poziționeze pe grafic punctul de funcționare energetică **F** al cuplajului în paralel al celor două pompe. Să se determine valorile debitului Q_F [m³/s] și înălțimii de pompare H_F [m], în punctul **F**. Să se poziționeze pe grafic punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, **F**₁ și **F**₂. Să se determine valorile debitelor Q_{F1} , Q_{F2} [m³/s], înălțimilor de pompare H_{F1} , H_{F2} [m] și randamentelor η_{F1} , η_{F2} [–], în punctele **F**₁ și **F**₂;

③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , în kW.

Rezolvare

① Curbele caracteristice energetice $H_1 = H_1(Q_1)$ și $H_2 = H_2(Q_2)$, respectiv curbele caracteristice de randament $\eta_1 = \eta_1(Q_1)$ și $\eta_2 = \eta_2(Q_2)$ sunt trasate în figura 2.18.

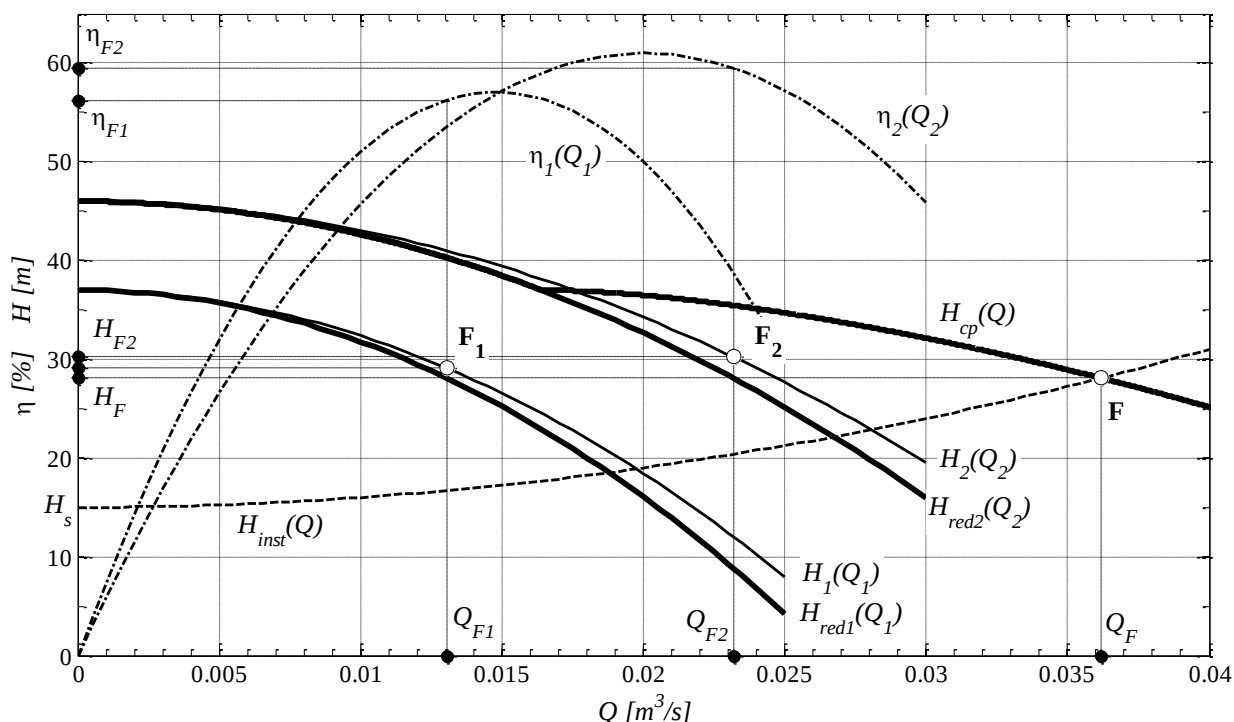


Fig. 2.18. – Punctul de funcționare energetică F al cuplajului în paralel al celor două pompe diferite și punctele de funcționare energetică F_1 și F_2 ale pompelor

Caracteristica energetică redusă $H_{redj} = H_{redj}(Q_j)$ a pompei P_j este definită prin relația (1.58):

$$H_{redj}(Q_j) = H_j(Q_j) - M_j Q_j^2, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}. \quad (2.36)$$

În tabelul 2.16 sunt trecute perechile de valori $\{Q_1, H_{red1}\}$ definite prin (2.36) pentru $j=1$, pentru valori discrete ale debitului $Q_1 \in [0; 0,025] \text{ m}^3/\text{s}$, iar în tabelul 2.17 sunt trecute perechile de valori $\{Q_2, H_{red2}\}$ definite prin (2.36) pentru $j=2$, pentru valori discrete ale debitului $Q_2 \in [0; 0,03] \text{ m}^3/\text{s}$. Caracteristicile energetice reduse $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ și $H_{red2} = H_{red2}(Q_2)$ sunt trasate în figura 2.18.

Caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a ansamblului de pompe cuplate în paralel se obține prin ”adunarea pe orizontală a curbelor” caracteristice energetice reduse ale pompelor: $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ și $H_{red2} = H_{red2}(Q_2)$. În această problemă, la mersul în gol al celor două pompe diferite este valabilă următoarea inegalitate: $H_{red2}(Q_2 = 0) > H_{red1}(Q_1 = 0)$.

Pentru valori ale înălțimii de pompare situate în intervalul $H_{red1}(Q_1 = 0) \leq H \leq H_{red2}(Q_2 = 0)$, caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a cuplajului în paralel coincide cu caracteristica energetică redusă $H_{red2} = H_{red2}(Q_2)$ a pompei P_2 . Procedura de ”adunare pe orizontală a curbelor” $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ și $H_{red2} = H_{red2}(Q_2)$ se aplică pentru valori ale înălțimii de pompare $H \leq H_{red1}(Q_1 = 0)$, unde pentru o anumită valoare constantă a înălțimii de pompare, $H = const.$, se calculează debitul Q vehiculat cu cele două pompe cuplate în paralel, ca sumă a debitelor pompate de către fiecare pompă:

$$Q(H_{cp} = H) = Q_1(H_{red1} = H) + Q_2(H_{red2} = H). \quad (2.37)$$

Caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a ansamblului celor două pompe identice cuplate în paralel este trasată în figura 2.18.

Caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ este descrisă de relația (1.33), în care modulul de rezistență hidraulică totală al instalației, notat M , este calculat prin însumarea modulelor de rezistență hidraulică ale conductelor magistrale de aspirație, respectiv de refulare, adică:

$$M = M_a + M_r = 3000 + 7000 = 10000 \text{ s}^2/\text{m}^5.$$

Cu această valoare, caracteristica instalației se scrie:

$$H_{inst} = H_s + MQ^2 = 15 + 10000 Q^2. \quad (2.38)$$

În tabelul 2.18 sunt trecute perechile de valori $\{Q, H_{inst}\}$ definite prin (2.38), pentru valori discrete ale debitului $Q \in [0; 0,04] \text{ m}^3/\text{s}$. Reprezentarea grafică a caracteristicii instalației (2.38) este efectuată în figura 2.18.

Tabel 2.18. – Perechile de valori $\{Q, H_{inst}\}$ calculate

$Q \text{ [m}^3/\text{s]}$	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04
$H_{inst} \text{ [m]}$	15	15,25	16	17,25	19	21,25	24	27,25	31

② În figura 2.18, **punctul de funcționare energetică F al cuplajului în paralel** al celor două pompe este situat la intersecția dintre caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a cuplajului în paralel și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definită prin (2.38).

Valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F , corespunzătoare punctului **F**, pot fi **citite direct pe axele diagramei** din figura 2.18, la capătul liniilor indicatoare punctate, orizontale și verticale, care pleacă din **F**. Rezultă următoarele valori: $Q_F = 0,0362 \text{ m}^3/\text{s}$ și $H_F \cong 28 \text{ m}$.

La intersecția dintre orizontala $H = H_F$ și caracteristica energetică redusă $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ a pompei **P₁**, se obține valoarea debitului vehiculat prin pompă: $Q_{F_1} = 0,013 \text{ m}^3/\text{s}$ (valoarea fiind citită pe abscisa diagramei din figura 2.18, la capătul liniei indicatoare punctate, verticale, care pleacă din punctul de intersecție sus-menționat). Similar, la intersecția dintre orizontala $H = H_F$ și caracteristica redusă $H_{red2} = H_{red2}(Q_2)$ a pompei **P₂**, se obține valoarea debitului vehiculat prin pompă: $Q_{F_2} = 0,0232 \text{ m}^3/\text{s}$ (valoare citită pe abscisa diagramei din figura 2.18).

În continuare, se verifică ecuația de continuitate în nodurile **A** și **B**:

$$Q_{F_1} + Q_{F_2} = (0,013 + 0,0232) \text{ m}^3/\text{s} = 0,0362 \text{ m}^3/\text{s} = Q_F.$$

Punctele de funcționare energetică **F_j**, unde $j \in \{1; 2\}$, se situează pe caracteristica energetică $H_j(Q_j)$ a pompei **P_j**, la intersecția dintre caracteristica $H_j(Q_j)$ și verticala $Q = Q_{F_j}$.

Înălțimile de pompare asigurate de pompe au valorile: $H_{F_1} = H_1(Q_{F_1}) \cong 29 \text{ m}$, respectiv $H_{F_2} = H_2(Q_{F_2}) \cong 30,2 \text{ m}$ (valorile fiind citite pe ordonata diagramei din figura 2.18, la capătul liniilor indicatoare punctate, orizontale, care pleacă din punctele **F₁** și **F₂**). Se observă că se verifică inegalitățile: $H_{F_1} > H_F$ și $H_{F_2} > H_F$.

Pe caracteristica de randament a pompei **P₁**, se citește valoarea randamentului corespunzător funcționării pompei: $\eta_{F_1} \cong 56 \%$, deci $\eta_{F_1} = 0,56$. Similar, pe caracteristica de randament a pompei **P₂**, se citește valoarea randamentului corespunzător funcționării pompei: $\eta_{F_2} \cong 59,5 \%$, deci $\eta_{F_2} = 0,595$.

③ Puterea electrică P_{F_j} consumată pentru pompare de către fiecare pompă, unde $j \in \{1; 2\}$, este definită prin relația (1.34):

$$P_{F1} = \frac{\rho g Q_{F1} H_{F1}}{\eta_{F1}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,013 \cdot 29}{0,56} = 6732 \text{ W},$$

$$P_{F2} = \frac{\rho g Q_{F2} H_{F2}}{\eta_{F2}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0232 \cdot 30,2}{0,595} = 11775 \text{ W}.$$

Puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , este suma puterilor consumate de cele două pompe:

$$P = P_{F1} + P_{F2} = 18507 \text{ W} \cong 18,5 \text{ kW}.$$

Problema 2.5.4. – Funcționarea pompelor centrifuge diferite cuplate în paralel (calcul numeric)

Se consideră două pompe centrifuge diferite, notate $\mathbf{P}_1$ și $\mathbf{P}_2$, montate în paralel într-o instalație hidraulică ca cea din figura 2.19 (în care nodurile $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ delimitează cuplajul paralel). Ambele pompe funcționează la turație nominală.

Înălțimea statică este $H_s = 15 \text{ m}$. Modulul de rezistență hidraulică al magistralei de aspirație este $M_a = 3000 \text{ s}^2/\text{m}^5$, iar modulul de rezistență hidraulică al magistralei de refulare este $M_r = 7000 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Pe cele două trasee hidraulice care leagă nodurile $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ (vezi figura 2.16), modulele de rezistență hidraulică au valorile $M_1 = 6000 \text{ s}^2/\text{m}^5$, respectiv $M_2 = 4000 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ a pompei $\mathbf{P}_j$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt approximate prin **funcții polinomiale de gradul al doilea**, care depind de debitul Q_j în m^3/s , astfel:

- caracteristica energetică a pompei $\mathbf{P}_1$: $H_1 = 37 - 46400 Q_1^2$ [m];
- caracteristica de randament a pompei $\mathbf{P}_1$: $\eta_1 = 77,05 Q_1 - 2602,55 Q_1^2$ [-];
- caracteristica energetică a pompei $\mathbf{P}_2$: $H_2 = 46 - 29350 Q_2^2$ [m];
- caracteristica de randament a pompei $\mathbf{P}_2$: $\eta_2 = 60,9 Q_2 - 1520 Q_2^2$ [-],

unde $0 \leq Q_1 \leq 0,025 \text{ m}^3/\text{s}$ și $0 \leq Q_2 \leq 0,03 \text{ m}^3/\text{s}$.

Se cere:

- ① Să se determine prin **calcul numeric** valorile debitelor Q_{F1} , Q_{F2} [m^3/s], înălțimilor de pompare H_{F1} , H_{F2} [m] și randamentelor η_{F1} , η_{F2} [–], în punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, F_1 și F_2 ;
- ② Să se determine prin **calcul numeric** valorile debitului Q_F [m^3/s] și înălțimii de pompare H_F [m], în punctul de funcționare energetică F al cuplajului în paralel al celor două pompe;
- ③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , în kW.

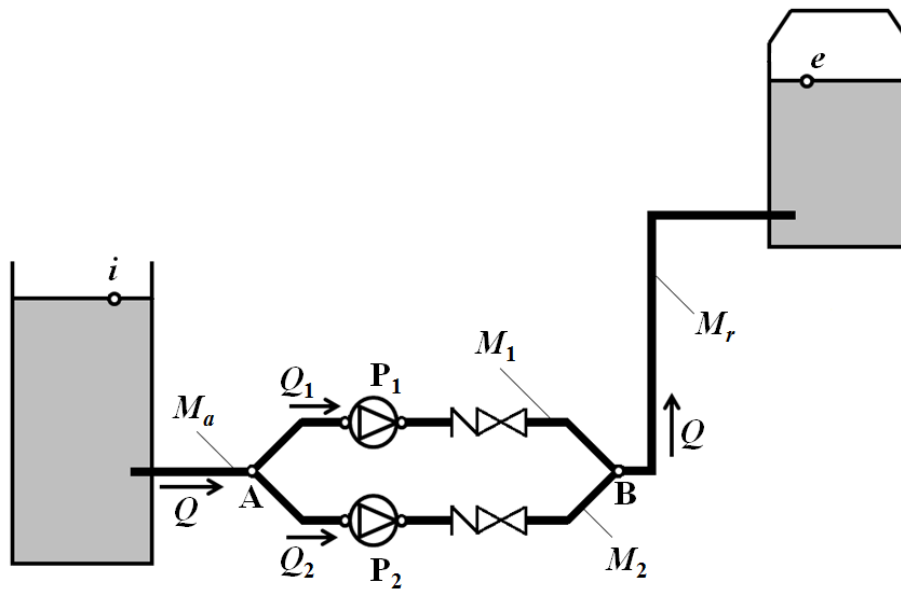


Fig. 2.19. – Schema instalației hidraulice cu două pompe centrifuge montate în paralel

Rezolvare

① Pentru configurația geometrică a instalației din figura 2.19, **legea energiei** (1.52) **se poate scrie pe ambele trasee hidraulice** care leagă punctul i (de intrare în sistem) și punctul e (de ieșire din sistem). Astfel, pentru traseele hidraulice definite de punctele $i-A-P_j-B-e$ rezultă:

$$H_i + H_j(Q_j) = H_e + h_{r_{i-A-P_j-B-e}}, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}. \quad (2.39)$$

Explicitând sarcinile hidrodinamice H_i , respectiv H_e (cu vitezele v_i și v_e neglijabile) și utilizând relația (1.22) de definiție a înălțimii statice H_s , sistemul (2.39) devine:

$$H_j(Q_j) = H_s + h_{r_{i-A}} + h_{r_{A-P_j-B}} + h_{r_{B-e}}, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}. \quad (2.40)$$

Cu notațiile din figura 2.19 și cu valorile modulelor de rezistență hidraulică din această problemă, pierderile de sarcină hidraulică din (2.40) pot fi exprimate astfel:

- pierderile de sarcină hidraulică aferente conductelor magistrale (instalației), notate h_r

$$h_r = h_{r_{i-A}} + h_{r_{B-e}} = (M_a + M_r) Q^2 = M Q^2 = 10000 Q^2; \quad (2.41)$$

- pierderile de sarcină hidraulică pe conductele care conectează pompa P_j la nodurile **A** și **B**,

$$\begin{aligned} h_{r_{A-P_1-B}} &= M_1 Q_1^2 = 6000 Q_1^2 \\ h_{r_{A-P_2-B}} &= M_2 Q_2^2 = 4000 Q_2^2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Cu (2.41) și (2.42), respectiv prin rearanjarea termenilor, sistemul (2.40) devine:

$$H_j(Q_j) - M_j Q_j^2 = H_s + M Q^2, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}. \quad (2.43)$$

Membrul stâng al relației (2.43) reprezintă **caracteristica energetică redusă a pompei P_j** :

$$H_{redj}(Q_j) = H_j(Q_j) - M_j Q_j^2, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}, \quad (2.44)$$

iar membrul drept reprezintă **caracteristica instalației**, care în acest caz se scrie:

$$H_{inst}(Q) = H_s + M Q^2 = 15 + 10000 Q^2. \quad (2.45)$$

Adăugând la (2.43) și ecuația continuității (aplicată în nodurile **A** sau **B**), **pentru cuplarea în paralel a celor două pompe se poate scrie următorul sistem de ecuații**:

$$\begin{cases} Q = Q_1 + Q_2 \\ H_{red1}(Q_1) = H_{inst}(Q) \\ H_{red2}(Q_2) = H_{inst}(Q) \end{cases} \quad (2.46)$$

care, ținând seama de (2.44) și (2.45), devine aici:

$$\begin{cases} Q = Q_1 + Q_2 \\ 37 - 46400 Q_1^2 - 6000 Q_1^2 = 15 + 10000 Q^2 \\ 46 - 29350 Q_2^2 - 4000 Q_2^2 = 15 + 10000 Q^2 \end{cases} \quad (2.47)$$

Sistemul de trei ecuații (2.47) se reduce la următorul sistem de două ecuații cu două necunoscute, Q_1 și Q_2 :

$$\begin{cases} f_1(Q_1, Q_2) = 22 - 52400 Q_1^2 - 10000 (Q_1 + Q_2)^2 = 0 \\ f_2(Q_1, Q_2) = 31 - 33350 Q_2^2 - 10000 (Q_1 + Q_2)^2 = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

Soluția sistemului de ecuații neliniare (2.48) reprezintă valorile Q_{F1} și Q_{F2} [m^3/s], aferente debitelor vehiculate de către pompe în punctele de funcționare energetică **F₁** și **F₂**.

Un **sistem de ecuații neliniare poate fi rezolvat numeric**, de exemplu cu **metoda Newton**, o metodă iterativă, global convergentă [32, paginile 376-381]. Pentru rezolvarea unui astfel de sistem de ecuații, se recomandă utilizarea unui software de calcul numeric specializat.

De exemplu, în **MATLAB**[®] [37, paginile 191-193] și în **GNU Octave**¹ [6, paginile 469-471], sistemele de ecuații neliniare pot fi rezolvate utilizând funcția *built-in* denumită **fsolve**. În cele ce urmează, vor fi prezentate etapele și liniile de comandă care permit **rezolvarea sistemului de ecuații neliniare (2.48) în MATLAB[®] și GNU Octave**:

- în codul numeric, se consideră vectorul coloană **Q**, cu două componente: $Q(1)$ și $Q(2)$, aferente variabilelor Q_1 și Q_2 , respectiv se consideră vectorul coloană **f**, cu două componente: $f(1)$ și $f(2)$, aferente funcțiilor f_1 și f_2 din (2.48);
- în tabelul 2.19 este prezentată funcția definită de către utilizator, denumită de exemplu **sistem.m**, în cadrul căreia este scris sistemul de ecuații neliniare (2.48);

Tabel 2.19. – Funcția *sistem.m* definită în **MATLAB**[®] și în **GNU Octave**

în MATLAB [®]	<pre>function f = sistem(Q) f(1) = 22 - 52400 * Q(1)^2 - 10000 * (Q(1) + Q(2))^2; f(2) = 31 - 33350 * Q(2)^2 - 10000 * (Q(1) + Q(2))^2;</pre>
în GNU Octave	<pre>function f = sistem(Q) f(1) = 22 - 52400 * Q(1)^2 - 10000 * (Q(1) + Q(2))^2; f(2) = 31 - 33350 * Q(2)^2 - 10000 * (Q(1) + Q(2))^2; endfunction</pre>

- se alege o aproximație de start pentru variabilele Q_1 și Q_2 , definită prin vectorul coloană **Q0**, cu componente $Q0(1) = 0$ și $Q0(2) = 0$; se pot alege și alte valori de start pentru debite, de exemplu valori nenule, $Q0(1) = 0.01$ și $Q0(2) = 0.01$ în m^3/s , dar metoda fiind global convergentă, soluția finală este atinsă și cu o aproximație de start fără semnificație fizică;
- în tabelul 2.20 sunt prezentate cele două linii simple de comandă, scrise identic în **MATLAB**[®] și în **GNU Octave**, care permit soluționarea sistemului de ecuații (2.48). Soluția obținută pentru sistemul (2.48) este de asemenea prezentată în tabelul 2.20.

Tabel 2.20. – Liniile de comandă și soluția obținută în **MATLAB**[®] și în **GNU Octave**

<pre>Q0 = [0; 0]; Q = fsolve(@sistem, Q0)</pre>

¹ GNU Octave [<http://www.gnu.org/software/octave/>] este o clonă *free software* a MATLAB.

$Q =$ 0.0130 0.0232

Având în vedere modul de declarare a variabilelor în cadrul calcului numeric efectuat în MATLAB[®] și în GNU Octave, soluția căutată se citește astfel:

$$Q(1) = Q_{F1} = 0,013 \text{ m}^3/\text{s} \text{ și } Q(2) = Q_{F2} = 0,0232 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Pe baza valorilor debitelor Q_{F1} și Q_{F2} [m^3/s], se pot calcula atât valorile înălțimilor de pompare asigurate de pompe în punctele de funcționare energetică F_1 și F_2 :

$$H_{F1} = 37 - 46400 Q_{F1}^2 = 37 - 46400 \cdot 0,013^2 = 29,16 \text{ m};$$

$$H_{F2} = 46 - 29350 Q_{F2}^2 = 46 - 29350 \cdot 0,0232^2 = 30,20 \text{ m};$$

cât și valorile randamentelor pompelor în F_1 și F_2 :

$$\eta_{F1} = 77,05 Q_{F1} - 2602,55 Q_{F1}^2 = 0,562;$$

$$\eta_{F2} = 60,9 Q_{F2} - 1520 Q_{F2}^2 = 0,595.$$

② Din ecuația continuității, se obține debitul Q_F vehiculat pe conductele magistrale ale instalației de către cele două pompe cuplate în paralel, acest debit corespunzând punctului de funcționare energetică F al cuplajului în paralel:

$$Q_F = Q_{F1} + Q_{F2} = 0,013 + 0,0232 = 0,0362 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Din caracteristica instalației (2.45), se poate calcula înălțimea de pompare H_F aferentă punctului de funcționare energetică F al cuplajului în paralel al celor două pompe, această valoare a înălțimii de pompare fiind asigurată în nodul B al instalației din figura 2.19:

$$H_F = H_{inst}(Q_F) = 15 + 10000 Q_F^2 = 15 + 10000 \cdot 0,0362^2 = 28,10 \text{ m}.$$

Se observă că se verifică inegalitățile: $H_{F1} > H_F$ și $H_{F2} > H_F$.

③ Puterea electrică P_{Fj} consumată pentru pompare de către fiecare pompă, unde $j \in \{1; 2\}$, este definită prin relația (1.34):

$$P_{F1} = \frac{\rho g Q_{F1} H_{F1}}{\eta_{F1}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,013 \cdot 29,16}{0,562} \cong 6745 \text{ W},$$

respectiv

$$P_{F_2} = \frac{\rho g Q_{F_2} H_{F_2}}{\eta_{F_2}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0232 \cdot 30,2}{0,595} = 11775 \text{ W}.$$

Puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , este suma puterilor consumate de cele două pompe:

$$P = P_{F_1} + P_{F_2} = 18520 \text{ W} \cong 18,5 \text{ kW}.$$

Se precizează faptul că **în prezenta problemă 2.5.4. a fost soluționat numeric același caz ca și cel definit în problema 2.5.3., unde metoda de calcul a fost una grafo-analitică.** Cu alte cuvinte, perechile de valori $\{Q_j, H_j\}$ și $\{Q_j, \eta_j\}$, cu $j \in \{1; 2\}$, ale caracteristicilor energetice și de randament din tabelele 2.16 și 2.17, sunt generate cu funcțiile polinomiale date în problema 2.5.4, anume: $H_1 = (37 - 46400 Q_1^2)$ [m] și $H_2 = (46 - 29350 Q_2^2)$ [m], respectiv $\eta_1 = 100(77,05 Q_1 - 2602,55 Q_1^2)$ [%] și $\eta_2 = 100(60,9 Q_2 - 1520 Q_2^2)$ [%].

Se constată că există mici diferențe între rezultatele obținute cu cele două metode. În acest caz particular, în care curbele caracteristice ale pompelor au fost generate cu funcții polinomiale, rezultatele obținute prin utilizarea metodei numerice sunt considerate exacte, chiar dacă metoda numerică implică de fapt o aproximare a soluției căutate².

Față de metoda de calcul grafo-analitică, **metoda numerică are dezavantajul** că depinde de existența unor expresii analitice, aferente curbelor de regresie polinomială care descriu curbele caracteristice ale pompelor, care **nu sunt disponibile în realitate**, precum și de experiența în **utilizarea unui software de calcul numeric specializat**. Aproximarea curbelor caracteristice ale pompelor cu funcții de tipul celor prezentate și apoi rezolvarea numerică duce la erori comparabile cu cele obținute cu metoda grafo-analitică.

² Rezolvarea numerică a unui sistem de ecuații neliniare depinde de metoda numerică utilizată, de soluția de start aleasă (care este direct legată de convergența metodei selectate), de numărul de iterații, de toleranțele impuse în codul de calcul numeric, precum și de precizia calculului numeric (calculul putând fi efectuat cu dublă precizie, sau doar cu simplă precizie).

3. PROBLEME COMPLEXE REZOLVATE

Problema 3.1. Funcționarea energetică și cavitațională a turbopompelor cuplate în paralel, care aspiră individual din același rezervor

Se consideră două pompe centrifuge identice, notate P_1 și P_2 , montate în paralel în instalația hidraulică din figura 3.1: pompele aspiră individual din rezervorul de aspirație și refulează pe conducta magistrală dintre nodul B și rezervorul de refulare. Ambele pompe funcționează la turație nominală.

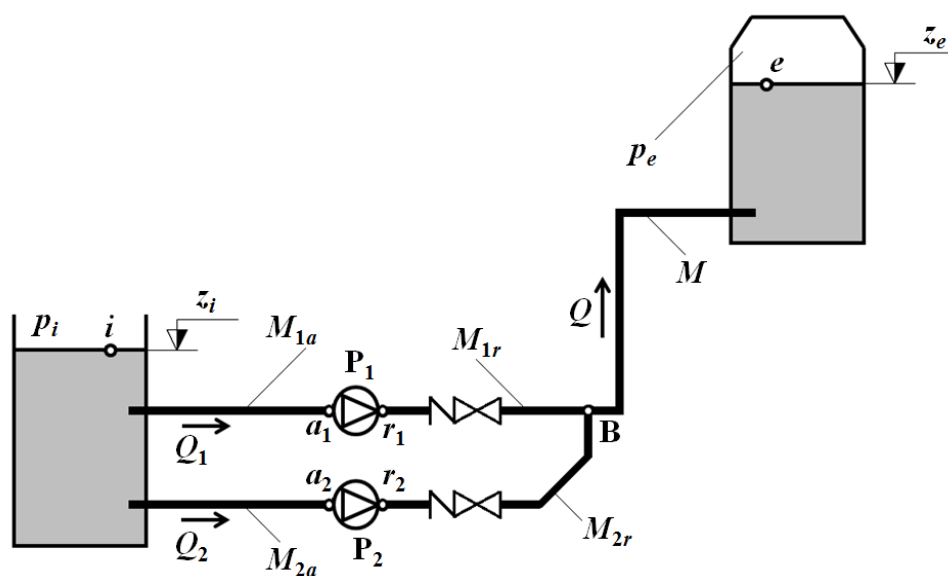


Fig. 3.1. – Schema instalației hidraulice cu două pompe centrifuge montate în paralel (pompele aspiră din același rezervor și refulează pe conductă magistrală unică)

Pe suprafața liberă a rezervorului de aspirație, cota apei este $z_i = 0\text{ m}$, viteza apei este $v_i \cong 0$, iar înălțimea dată de presiunea absolută este $p_i/\rho g = 10\text{ m}$. Pe suprafața liberă a rezervorului de refulare, cota apei este $z_e = 5\text{ m}$, viteza apei este $v_e \cong 0$, iar înălțimea dată de presiunea absolută este $p_e/\rho g = 30\text{ m}$. La aspirația fiecărei pompe, cota punctului a_j , unde $j \in \{1; 2\}$, este: $z_{a_j} = 3\text{ m}$. Densitatea apei este $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră

$g \cong 10 \text{ m/s}^2$. Presiunea absolută de vaporizare a apei la 15°C este $p_v = 12,8 \text{ mmHg} = 1,71 \text{ kPa}$ (adică $p_v/\rho g \cong 0,17 \text{ m}$). Pe fiecare traseu hidraulic care conectează pompa $\mathbf{P}_j$, cu $j \in \{1; 2\}$, între rezervorul de aspirație și nodul $\mathbf{B}$, modulele de rezistență hidraulică au următoarele valori: $M_{1a} = M_{2a} = 6000 \text{ s}^2/\text{m}^5$ la aspirația pompelor (amonte de nodul $\mathbf{a}_j$, unde $j \in \{1; 2\}$), respectiv $M_{1r} = 4000 \text{ s}^2/\text{m}^5$ și $M_{2r} = 14000 \text{ s}^2/\text{m}^5$ la refularea pompelor (între nodul $\mathbf{r}_j$, cu $j \in \{1; 2\}$ și nodul $\mathbf{B}$). Modulul de rezistență hidraulică al magistralei de refulare este $M = 20000 \text{ s}^2/\text{m}^5$.

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe $\mathbf{P}_j$ la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$, caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$ și caracteristica de cavitație $NPSH_j = NPSH_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă tabelară** în tabelul 3.1, pe perechi de valori $\{Q_j, H_j\}$, $\{Q_j, \eta_j\}$ și $\{Q_j, NPSH_j\}$ pentru valori discrete ale debitului $Q_j \in [0; 0,02] \text{ m}^3/\text{s}$.

Tabel 3.1. – Perechile de valori date: $\{Q_1, H_1\} \equiv \{Q_2, H_2\}$ și $\{Q_1, \eta_1\} \equiv \{Q_2, \eta_2\}$, precum și perechile de valori calculate: $\{Q_1, H_{red1}\}$, $\{Q_2, H_{red2}\}$ și $\{Q_1, NPSH_{inst1}\} \equiv \{Q_2, NPSH_{inst2}\}$

$Q_1 = Q_2 \text{ [m}^3/\text{s]}$	0	0,005	0,01	0,015	0,02
$H_1 = H_2 \text{ [m]}$	50	48,4	43,5	35,4	24
$\eta_1 = \eta_2 \text{ [%]}$	0	34	55	62	55
$NPSH_1 = NPSH_2 \text{ [m]}$	2,5	2,65	3,2	4,15	5,5
$H_{red1} \text{ [m]}$	50	48,15	42,5	33,15	20
$H_{red2} \text{ [m]}$	50	47,9	41,5	30,9	16
$NPSH_{instj} \text{ [m]}, j \in \{1; 2\}$	6,83	6,68	6,23	5,48	4,43

Se cere:

① Să se traseze pe același grafic:

- curba caracteristică energetică $H_j = H_j(Q_j)$, curba caracteristică de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$ și curba caracteristică de cavitație $NPSH_j = NPSH_j(Q_j)$, precum și caracteristica energetică redusă $H_{redj} = H_{redj}(Q_j)$ a fiecărei pompe, unde $j \in \{1; 2\}$;

- caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a ansamblului de pompe cuplate în paralel;
 - caracteristica instalației: $H_{inst} = H_{inst}(Q)$;
 - curba cavitațională a instalației $NPSH_{instj} = NPSH_{instj}(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, o curbă unică în acest caz, deoarece la aspirația pompelor, modulele de rezistență hidraulică sunt egale: $M_{1a} = M_{2a}$;
- ② Să se poziționeze pe grafic punctul de funcționare energetică **F** al cuplajului în paralel al celor două pompe. Să se determine valorile debitului Q_F [m^3/s] și înălțimii de pompare H_F [m], în punctul **F**. Să se poziționeze pe grafic punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, **F**₁ și **F**₂. Să se determine valorile debitelor Q_{F1} , Q_{F2} [m^3/s], înălțimilor de pompare H_{F1} , H_{F2} [m] și randamentelor η_{F1} , η_{F2} [-], în **F**₁ și **F**₂;
- ③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , în kW;
- ④ Să se poziționeze pe grafic punctele de funcționare cavitațională ale pompelor, **C**₁ și **C**₂ și să se determine valorile limită ale debitului Q_{limj} [m^3/s], cu $j \in \{1; 2\}$, în **C**₁ și **C**₂;
- ⑤ Pe baza valorilor de NPSH cerut de fiecare pompă în punctul **F**_j, $NPSH_j(Q_{Fj})$, respectiv de NPSH disponibil în instalație în punctul **F**_j, $NPSH_{instj}(Q_{Fj})$, sau pe baza valorilor obținute pentru debitele Q_{Fj} și Q_{limj} , unde $j \in \{1; 2\}$, să se menționeze dacă pompele funcționează fără cavitație, sau cu cavitație la aspirație.

Rezolvare

- ① Curba caracteristică energetică $H_1 = H_1(Q_1)$, curba caracteristică de randament $\eta_1 = \eta_1(Q_1)$ și curba caracteristică de cavitație $NPSH_1 = NPSH_1(Q_1)$ pentru pompa **P**₁ sunt trasate în figura 3.2. Aceste curbe sunt identice cu curbele pompei **P**₂.
- Caracteristica energetică redusă $H_{redj} = H_{redj}(Q_j)$ a pompei **P**_j este definită prin relația (1.58):

$$H_{redj}(Q_j) = H_j(Q_j) - M_j Q_j^2 = H_j(Q_j) - (M_{ja} + M_{jr}) Q_j^2, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}. \quad (3.1)$$

În această caz, modulele de rezistență hidraulică M_j ale traseelor de conductă dintre rezervorul de aspirație și nodul **B** au valori diferite:

$$M_1 = M_{1a} + M_{1r} = 6000 + 4000 = 10000 \text{ s}^2/\text{m}^5;$$

$$M_2 = M_{2a} + M_{2r} = 6000 + 14000 = 20000 \text{ s}^2/\text{m}^5.$$

În tabelul 3.1 sunt trecute perechile de valori $\{Q_j, H_{redj}\}$, cu $j \in \{1; 2\}$, definite prin (3.1), pentru valori discrete ale debitului $Q_j \in [0; 0,02] \text{ m}^3/\text{s}$. Cele două caracteristici energetice reduse $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ și $H_{red2} = H_{red2}(Q_2)$ sunt trasate în figura 3.2.

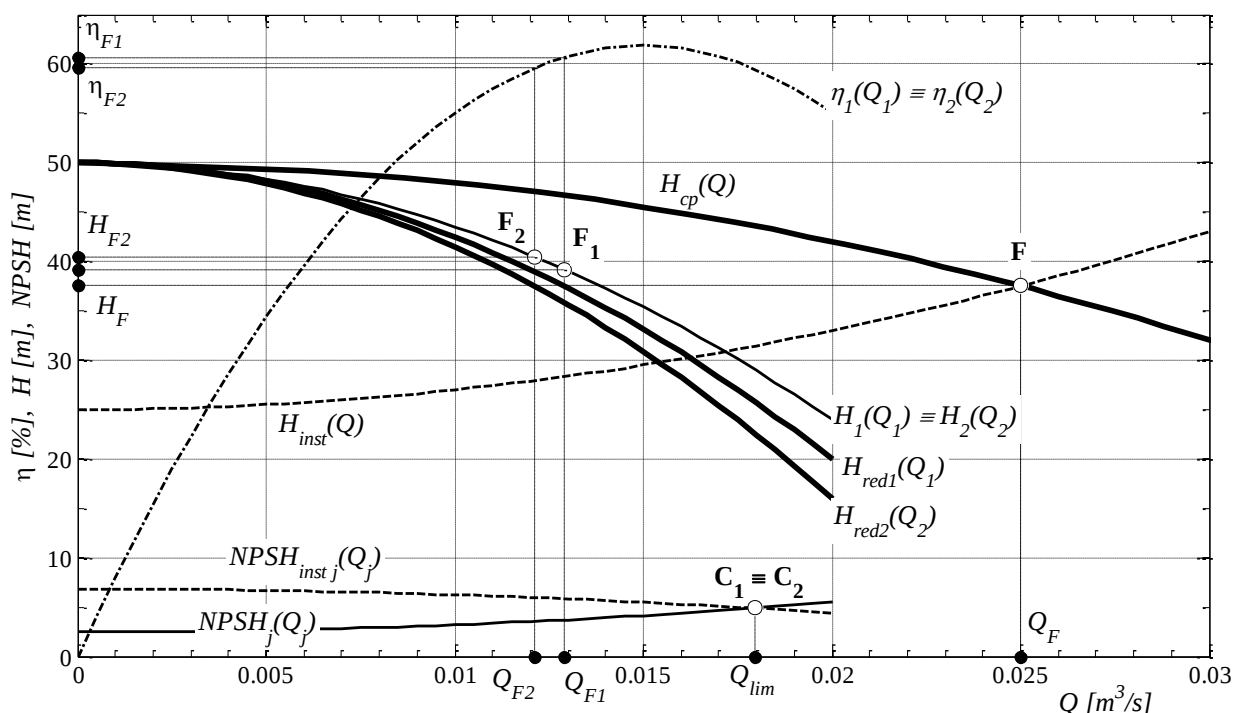


Fig. 3.2. – Punctul de funcționare energetică F al cuplajului în paralel al celor două pompe, punctele de funcționare energetică F_1 și F_2 ale pompelor și punctele de funcționare cavitațională C_1 și C_2

Caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a ansamblului de pompe cuplate în paralel se obține prin ”adunarea pe orizontală a curbelor” caracteristice energetice reduse ale pompelor: $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ și $H_{red2} = H_{red2}(Q_2)$. Această procedură de ”adunare pe orizontală a două curbe” presupune că pentru o anumită valoare constantă a înălțimii de pompare, $H = \text{const.}$, unde $H \leq H_{redj}(Q_j = 0)$, cu $j \in \{1; 2\}$, se calculează debitul Q vehiculat cu cele două pompe cuplate în paralel, ca sumă a debitelor pompate de către fiecare pompă:

$$Q(H_{cp} = H) = Q_1(H_{red1} = H) + Q_2(H_{red2} = H). \quad (3.2)$$

Caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a ansamblului celor două pompe identice cuplate în paralel este trasată în figura 3.2.

Caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ este descrisă de relația (1.33), în care înălțimea statică H_s definită prin (1.22) are valoarea:

$$H_s = \frac{p_e - p_i}{\rho g} + (z_e - z_i) = (30 - 10) + (5 - 0) = 25 \text{ m},$$

iar modulul de rezistență hidraulică al instalației este format doar din modulul de rezistență hidraulică al magistralei de refulare: $M = 20000 \text{ s}^2/\text{m}^5$ (în acest caz, nu există magistrală unică de aspirație). Cu aceste valori, caracteristica instalației pentru problema considerată este definită astfel:

$$H_{inst} = H_s + MQ^2 = 25 + 20000 Q^2. \quad (3.3)$$

În tabelul 3.2 sunt inserate valorile H_{inst} [m], calculate cu relația (3.3), pentru 7 valori discrete ale debitului $Q \in [0; 0,03] \text{ m}^3/\text{s}$.

Tabel 3.2. – Perechile de valori $\{Q, H_{inst}\}$ calculate

$Q [\text{m}^3/\text{s}]$	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03
$H_{inst} [\text{m}]$	25	25,5	27	29,5	33	37,5	43

Înălțimea geodezică de aspirație a pompelor este definită prin (1.19) și, pentru cazul studiat aici, are valoare pozitivă unică, anume:

$$H_{ga_j} = z_{a_j} - z_i = 3 - 0 = 3 \text{ m}, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}.$$

Deoarece aici $M_{1a} = M_{2a}$, curba cavitațională a instalației $NPSH_{instj} = NPSH_{instj}(Q_j)$ este unică, fiind definită prin (1.35) pe fiecare traseu de aspirație al pompelor:

$$\begin{aligned} NPSH_{instj} &= \frac{p_{absi} - p_v}{\rho g} + \frac{v_i^2}{2g} - H_{ga_j} - M_{ja} Q_j^2 =, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}. \\ &= (10 - 0,17) + 0 - 3 - 6000 Q_j^2 = 6,83 - 6000 Q_j^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

În tabelul 3.1 sunt inserate valorile $NPSH_{instj}$ [m], calculate cu relația (3.4), pentru 5 valori discrete ale debitului $Q_j \in [0; 0,02] \text{ m}^3/\text{s}$.

Caracteristica instalației definită prin (3.3) și curba cavitațională a instalației definită prin (3.4), sunt trasate în figura 3.2.

② În figura 3.2, **punctul de funcționare energetică F al cuplajului în paralel** al celor două pompe este situat la intersecția dintre caracteristica energetică $H_{cp} = H_{cp}(Q)$ a cuplajului în paralel și caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definită prin (3.3).

Valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F , corespunzătoare punctului **F**, pot fi **citite direct pe axele diagramei** din figura 3.2, la capătul liniilor indicatoare punctate, orizontale și verticale, care pleacă din **F**. Rezultă următoarele valori: $Q_F = 0,025 \text{ m}^3/\text{s}$ și $H_F \cong 37,5 \text{ m}$.

La intersecția dintre orizontala $H = H_F$ și caracteristica energetică redusă $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ a pompei **P₁**, se obține valoarea debitului vehiculat prin pompă: $Q_{F_1} = 0,0129 \text{ m}^3/\text{s}$ (valoarea fiind citită pe abscisa diagramei din figura 3.2, la capătul liniei indicatoare punctate, verticale, care pleacă din punctul de intersecție sus-menționat).

Similar, la intersecția dintre orizontala $H = H_F$ și caracteristica redusă $H_{red2} = H_{red2}(Q_2)$ a pompei **P₂**, se obține $Q_{F_2} = 0,0121 \text{ m}^3/\text{s}$ (valoare citită pe abscisa diagramei din figura 3.2).

În continuare, se verifică ecuația de continuitate în nodul **B** (cu observația că fiind vorba despre **valori citite pe diagramă**, egalitatea va fi aproximativă):

$$Q_{F_1} + Q_{F_2} = (0,0129 + 0,0121) \text{ m}^3/\text{s} = 0,025 \text{ m}^3/\text{s} = Q_F.$$

Fiecare punct de funcționare energetică **F_j** se situează pe caracteristica energetică $H_j(Q_j)$ a pompei **P_j**, la intersecția fiecărei caracteristici $H_j(Q_j)$ cu verticala $Q = Q_{F_j}$, unde $j \in \{1; 2\}$.

Înălțimile de pompare asigurate de fiecare dintre cele două pompe au valorile: $H_{F_1} = H_1(Q_{F_1}) \cong 39 \text{ m}$ și $H_{F_2} = H_2(Q_{F_2}) \cong 40,5 \text{ m}$ (valorile fiind citite pe ordonata diagramei din figura 3.2, la capătul liniilor indicatoare punctate, orizontale, care pleacă din punctele **F₁** și **F₂**). Se observă că se verifică inegalitatea: $H_{F_j} > H_F$, cu $j \in \{1; 2\}$.

Pe caracteristica de randament a pompei **P₁**, se citește valoarea randamentului corespunzător debitului $Q = Q_{F_1}$, anume: $\eta_{F_1} \cong 60,5\%$, deci $\eta_{F_1} = 0,605$. Similar, pe caracteristica de randament a pompei **P₂**, se citește valoarea randamentului corespunzător debitului $Q = Q_{F_2}$, anume: $\eta_{F_2} \cong 59,5\%$, deci $\eta_{F_2} = 0,595$.

③ Puterea electrică P_{F_j} consumată pentru pompare de către fiecare pompă, unde $j \in \{1; 2\}$, este definită prin relația (1.34):

$$P_{F1} = \frac{\rho g Q_{F1} H_{F1}}{\eta_{F1}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0129 \cdot 39}{0,605} \cong 8316 \text{ W};$$

$$P_{F2} = \frac{\rho g Q_{F2} H_{F2}}{\eta_{F2}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0121 \cdot 40,5}{0,595} \cong 8236 \text{ W}.$$

Puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , este suma puterilor consumate de cele două pompe:

$$P = P_{F1} + P_{F2} = 16552 \text{ W} \cong 16,6 \text{ kW}.$$

④ În figura 3.2, punctul de funcționare cavitațională C_j aferent pompei P_j este situat la intersecția dintre caracteristica de cavitație a pompei $NPSH_j = NPSH_j(Q_j)$ și curba cavitațională a instalației $NPSH_{instj} = NPSH_{instj}(Q_j)$, definită prin (3.4), unde $j \in \{1; 2\}$. În cazul acestei probleme, în care la aspirația pompelor identice, modulele de rezistență hidraulică sunt egale ($M_{1a} = M_{2a}$), rezultă că **punctele de funcționare cavitațională coincid**, adică: $C_1 \equiv C_2$. În consecință, rezultă o **valoare unică a debitului limită**: $Q_{limj} = Q_{lim} \cong 0,018 \text{ m}^3/\text{s}$ (valoare citită **direct pe axele diagramei** din figura 3.2, la capătul liniei indicatoare punctate verticale, care pleacă din $C_1 \equiv C_2$).

⑤ Pentru funcționarea pompei fără cavitație, trebuie îndeplinită condiția (1.23), în care valorile de NPSH cerut de pompa P_j sunt calculate pentru Q_{Fj} :

$$NPSH_j(Q_{Fj}) < NPSH_{instj}(Q_{Fj}), \text{ cu } j \in \{1; 2\}. \quad (3.5)$$

Din figura 3.2 se observă că pentru ambele valori Q_{Fj} obținute, **condiția (3.5) este verificată**, adică: pentru $Q_{F1} = 0,0129 \text{ m}^3/\text{s}$, rezultă: $NPSH_1(Q_{F1}) \cong 3,7 \text{ m}$ cerut la aspirația pompei P_1 , față de $NPSH_{inst1}(Q_{F1}) \cong 5,8 \text{ m}$ disponibil în instalație; similar, pentru $Q_{F2} = 0,0121 \text{ m}^3/\text{s}$, rezultă: $NPSH_2(Q_{F2}) \cong 3,5 \text{ m}$ cerut la aspirația pompei P_2 , față de $NPSH_{inst2}(Q_{F2}) \cong 6 \text{ m}$ disponibil în instalație. **Condiția (3.5) fiind îndeplinită**, rezultă că ambele **pompe centrifuge studiate funcționează fără cavitație**.

O **condiție similară pentru funcționarea fără cavitație** este (1.36): $Q_{Fj} < Q_{limj}$, unde $j \in \{1; 2\}$, adică punctul de funcționare energetică F_j trebuie să fie în stânga punctului de funcționare cavitațională C_j , poziție care se verifică în figura 3.2. Se reamintește faptul că într-o marjă de $\pm 3\%$ din Q_{limj} , poate să apară incipiența cavitațională. Deci condiția (1.36) devine:

$$Q_{Fj} < 0,97Q_{limj}, \text{ cu } j \in \{1; 2\}. \quad (3.6)$$

Pentru $Q_{limj} = Q_{lim} \cong 0,018 \text{ m}^3/\text{s}$, rezultă valoarea critică $0,97Q_{lim} = 0,0175 \text{ m}^3/\text{s}$. Pentru valorile debitelor Q_{Fj} obținute aici, anume $Q_{F1} = 0,0129 \text{ m}^3/\text{s}$ și $Q_{F2} = 0,0121 \text{ m}^3/\text{s}$, condiția (3.6) este îndeplinită.

Problema 3.2. Funcționarea cu turație variabilă a turbopompelor cuplate în paralel, astfel încât în instalație să fie asigurat debitul cerut, sau înălțimea de pompare cerută (calcul grafo-analitic)

Se consideră două pompe centrifuge identice, notate P_1 și P_2 , montate în paralel în instalația hidraulică din figura 3.3 (în care nodurile **A** și **B** delimitează cuplajul paralel).

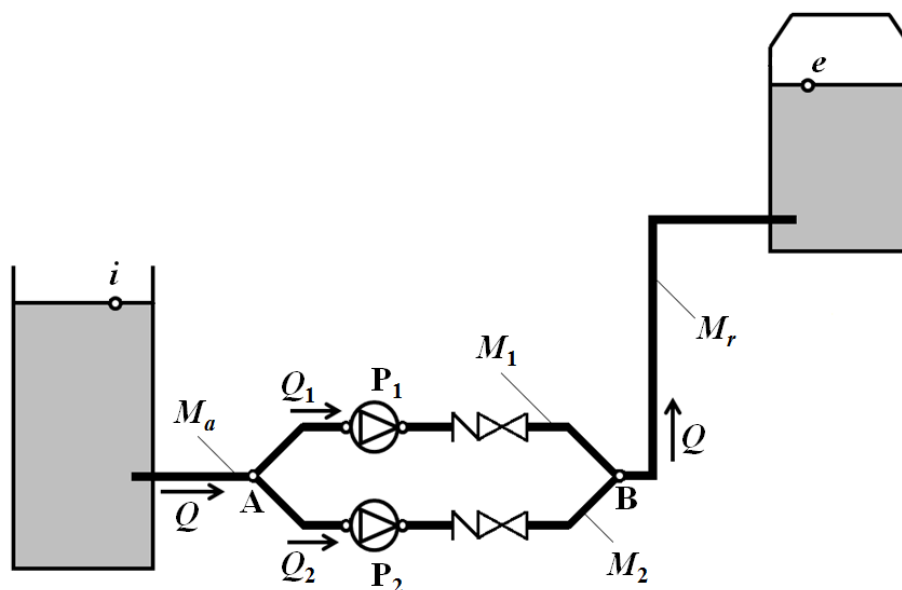


Fig. 3.3. – Schema instalației hidraulice cu două pompe centrifuge montate în paralel (nodurile **A** și **B** delimitează cuplajul paralel)

Pe suprafața liberă a rezervorului de aspirație, viteza apei este $v_i \cong 0$, iar înălțimea dată de presiunea absolută este $p_i/\rho g = 10 \text{ m}$. Pe suprafața liberă a rezervorului de refulare, viteza apei este $v_e \cong 0$, iar înălțimea dată de presiunea absolută este $p_e/\rho g = 15 \text{ m}$. Înălțimea geodezică are valoarea $H_g = 18 \text{ m}$. Modulul de rezistență hidraulică al magistralei de aspirație este $M_a = 5000 \text{ s}^2/\text{m}^5$ (vezi figura 3.3), iar modulul de rezistență hidraulică al magistralei de

refulare este $M_r = 14000 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Pe fiecare traseu hidraulic care leagă nodurile **A** și **B**, modulul de rezistență hidraulică are aceeași valoare, anume: $M_1 = M_2 = 9000 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Pompa **P**₁ funcționează cu turația n_1 constantă, egală cu turația nominală: $n_1 = n_0 = 1450$ rot/min. Pompa **P**₂ funcționează cu turație n_2 variabilă, de exemplu: $n_2 \leq n_0$.

Curbele caracteristice ale pompelor la turația nominală n_0 , anume: caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ și caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$, sunt date **sub formă tabelară** în tabelul 3.3, pe perechi de valori $\{Q_0, H_0\}$ și $\{Q_0, \eta_0\}$, pentru valori discrete ale debitului $Q_0 \in [0; 0,02] \text{ m}^3/\text{s}$.

Tabel 3.3. – Perechile de valori date: $\{Q_0, H_0\} \equiv \{Q_1, H_1\}$ și $\{Q_0, \eta_0\} \equiv \{Q_1, \eta_1\}$, precum și perechile de valori calculate: $\{Q_1, H_{red1}\}$

$Q_0 \equiv Q_1 \text{ [m}^3/\text{s]}$	0	0,005	0,01	0,015	0,02
$H_0 \equiv H_1 \text{ [m]}$	50	48,4	43,5	35,4	24
$\eta_0 \equiv \eta_1 \text{ [%]}$	0	34	55	62	55
$H_{red1} \text{ [m]}$	50	48,18	42,6	33,38	20,4

Se cere:

- ① Să se determine la ce turație n_2 trebuie să fie antrenată pompa **P**₂, astfel încât prin cuplarea în paralel a pompelor **P**₁ și **P**₂, debitul de apă tranzitat pe magistrala de refulare să aibă valoarea $Q = 0,026 \text{ m}^3/\text{s}$;
- ② Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , în kW.

Rezolvare

① Pompa **P**₁ funcționează cu turația n_1 egală cu turația nominală: $n_1 = n_0$, deci curbele caracteristice ale pompei **P**₁ sunt identice cu curbele caracteristice definite sub formă tabelară în tabelul 3.3, anume: $\{Q_1, H_1\} \equiv \{Q_0, H_0\}$ și $\{Q_1, \eta_1\} \equiv \{Q_0, \eta_0\}$. Aceste curbe sunt trasate în figura 3.4.

Caracteristica energetică redusă $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ a pompei **P**₁ este definită prin (1.58):

$$H_{red1}(Q_1) = H_1(Q_1) - M_1 Q_1^2 = H_1(Q_1) - 9000 Q_1^2. \quad (3.7)$$

În tabelul 3.3 sunt trecute perechile de valori $\{Q_1, H_{red1}\}$ definite prin (3.7), pentru valori discrete ale debitului $Q_1 \in [0; 0,02] \text{ m}^3/\text{s}$. Caracteristica energetică redusă $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ este trasată în figura 3.4.

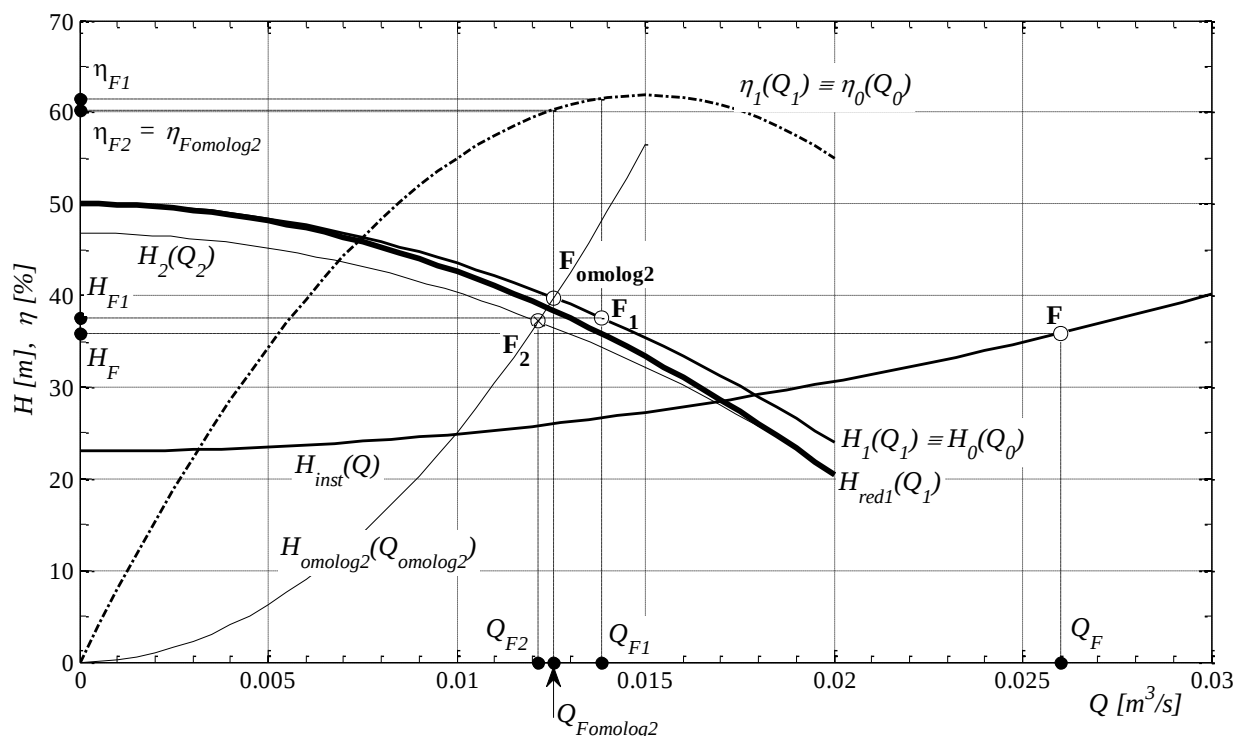


Fig. 3.4. – Punctul de funcționare energetică F al cuplajului în paralel al celor două pompe, punctele de funcționare energetică F_1 și F_2 ale pompelor, respectiv punctul omolog de funcționare $F_{omolog2}$ aferent pompei P_2

Caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$ este descrisă de relația (1.33), în care înălțimea statică H_s definită prin (1.22) are valoarea:

$$H_s = \frac{p_e - p_i}{\rho g} + H_g = (15 - 10) + 18 = 23 \text{ m},$$

iar modulul de rezistență hidraulică totală al instalației, notat M , este calculat prin însumarea modulelor de rezistență hidraulică ale conductelor magistrale de aspirație, respectiv de refulare, adică:

$$M = M_a + M_r = 5000 + 14000 = 19000 \text{ s}^2/\text{m}^5.$$

Cu aceste valori, caracteristica instalației se scrie:

$$H_{inst} = H_s + MQ^2 = 23 + 19000 Q^2. \quad (3.8)$$

În tabelul 3.4 sunt trecute perechile de valori $\{Q, H_{inst}\}$ definite prin (3.8), pentru valori discrete ale debitului $Q \in [0; 0,03] \text{ m}^3/\text{s}$. Reprezentarea grafică a caracteristicii instalației (3.8) este efectuată în figura 3.4.

Tabel 3.4. – Perechile de valori $\{Q, H_{inst}\}$ calculate

$Q \text{ [m}^3/\text{s]}$	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03
$H_{inst} \text{ [m]}$	23	23,48	24,9	27,28	30,6	34,88	40,1

În această problemă s-a impus valoarea debitului de apă care trebuie să fie tranzitat pe magistrala de refulare la funcționarea în paralel a pompelor $\mathbf{P}_1$ și $\mathbf{P}_2$. Aceasta înseamnă că în **punctul de funcționare energetică F al cuplajului în paralel** al celor două pompe, trebuie asigurat debitul: $Q = Q_F = 0,026 \text{ m}^3/\text{s}$. Punctul de funcționare energetică F al cuplajului în paralel este situat la intersecția dintre caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definită prin (3.8) și verticala $Q = Q_F$ (vezi figura 3.4). Valoarea înălțimii de pompare H_F , corespunzătoare punctului F, poate fi calculată direct cu relația (3.8), astfel:

$$H_F = H_{inst}(Q_F) = 23 + 19000 Q_F^2 = 23 + 19000 \cdot 0,026^2 = 35,84 \text{ m}.$$

În cazul în care, în locul debitului impus $Q = Q_F$, s-ar impune înălțimea de pompare $H = H_F$, problema s-ar aborda în mod similar, adică: punctul de funcționare energetică F al cuplajului în paralel s-ar situa la intersecția dintre caracteristica instalației $H_{inst} = H_{inst}(Q)$, definită prin (3.8) și orizontala $H = H_F$ (vezi figura 3.4). Apoi, valoarea debitului pompat Q_F , corespunzător punctului F, s-ar calcula direct cu relația (3.8), astfel:

$$Q_F = \sqrt{\frac{H_F - 23}{19000}} \text{ [m}^3/\text{s]}.$$

La intersecția dintre orizontala $H = H_F$ și caracteristica energetică redusă $H_{red1} = H_{red1}(Q_1)$ a pompei $\mathbf{P}_1$, unde $H_F = H_{red1}(Q_{F1})$, se obține valoarea debitului vehiculat prin această pompă: $Q_{F1} = 0,0138 \text{ m}^3/\text{s}$ (valoarea fiind citită pe abscisa diagramei din figura 3.4, la capătul liniei indicatoare punctate, verticale, care pleacă din punctul de intersecție sus-menționat).

Punctul de funcționare energetică F_1 se situează pe caracteristica energetică $H_1(Q_1)$ a pompei P_1 , la intersecția dintre caracteristica $H_1(Q_1)$ și verticala $Q = Q_{F_1}$. În punctul F_1 se poate citi înălțimea de pompare asigurată de pompa P_1 , anume: $H_{F_1} = H_1(Q_{F_1}) \cong 37,5\text{m}$ (valoare citită pe ordonata diagramei din figura 3.4, la capătul liniei indicatoare punctate, orizontale, care pleacă din punctul F_1).

Pe caracteristica de randament a pompei P_1 , se citește valoarea randamentului corespunzător funcționării pompei: $\eta_{F_1} \cong 61,5\%$, deci $\eta_{F_1} = 0,615$.

Valoarea debitului vehiculat prin pompa P_2 , se calculează din **ecuația continuității** aplicată în nodurile **A** sau **B**:

$$Q_{F_2} = Q_F - Q_{F_1} = 0,026 - 0,0138 = 0,0122 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Înălțimea de pompare $H_{F_2} = H_2(Q_{F_2})$, asigurată de pompa P_2 în punctul de funcționare energetică F_2 , va fi determinată prin adăugarea pierderii de sarcină hidraulică $M_2 Q_{F_2}^2$ de pe tronsonul **A-P₂-B**, la valoarea H_F :

$$H_{F_2} = H_F + M_2 Q_{F_2}^2 = 35,84 + 9000 \cdot 0,0122^2 = 37,18 \text{ m}.$$

Cunoscând perechea de valori $\{Q_{F_2}, H_{F_2}\}$, punctul de funcționare energetică F_2 poate fi poziționat pe graficul din figura 3.4. Prin punctul F_2 , trece curba caracteristică energetică $H_2(Q_2)$ a pompei P_2 , caracteristică necunoscută, din moment ce nu se cunoaște turația n_2 , deci nu se pot aplica relațiile de similitudine (1.37) și (1.38) pentru determinarea curbei $H_2(Q_2)$.

Pentru a putea determina turația n_2 , se scriu **relațiile de similitudine** (1.37) și (1.38) pentru debitele și înălțimile de pompare corespunzătoare punctului de funcționare energetică F_2 , respectiv **punctului său omolog de funcționare** F_{omolog_2} , situat pe caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ la turația nominală n_0 :

$$\begin{cases} \frac{Q_{omolog_2}}{Q_{F_2}} = \frac{n_0}{n_2} \\ \frac{H_{omolog_2}}{H_{F_2}} = \left(\frac{n_0}{n_2}\right)^2 \end{cases} \quad (3.9)$$

Sistemul (3.9) cu două ecuații și trei necunoscute ($n_2, Q_{omolog_2}, H_{omolog_2}$) nu poate fi rezolvat direct, însă prin eliminarea raportului turațiilor între cele două ecuații, se obține:

$$H_{omolog_2} = \left(\frac{H_{F_2}}{Q_{F_2}^2} \right) Q_{omolog_2}^2 = C Q_{omolog_2}^2, \quad (3.10)$$

unde constanta are valoarea $C = H_{F_2} / Q_{F_2}^2 = 37,18 / 0,0122^2 \cong 2,5 \cdot 10^5 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Parabola definită prin (3.10), trasată în figura 3.4, este **parabola punctelor omoloage lui F_2** în planul $\{Q, H\}$, iar la intersecția acesteia cu caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ a pompei, se obține **punctul omolog de funcționare F_{omolog_2}** , în dreptul căruia se citește pe abscisă valoarea debitului $Q_{F_{omolog_2}} = 0,0126 \text{ m}^3/\text{s}$. Introducând valoarea $Q_{F_{omolog_2}}$ în prima ecuație a sistemului (3.9), rezultă raportul turațiilor:

$$\frac{n_2}{n_0} = \frac{Q_{F_2}}{Q_{F_{omolog_2}}} = \frac{0,0122}{0,0126} \cong 0,968$$

turația n_2 având valoarea: $n_2 \cong 0,968 n_0 = 0,968 \cdot 1450 \cong 1404 \text{ rot/min}$.

Randamentul η_{F_2} cu care funcționează pompa P_2 (la altă turație decât cea nominală), poate fi determinat pe baza punctului omolog de funcționare F_{omolog_2} , punct în care regimul de funcționare al pompei la turație nominală este similar celui din punctul funcționare energetică F_2 al pompei cu turație $n_2 \neq n_0$.

Pentru valoarea debitului $Q_{F_{omolog_2}}$ corepunzătoare punctului F_{omolog_2} , se citește randamentul $\eta_{F_{omolog_2}}$ pe caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ din figura 3.4 și rezultă randamentul $\eta_{F_{omolog_2}} = 0,603$ (valoarea randamentului în procente, citită pe graficul din figura 3.4, fiind $\eta_{F_{omolog_2}} \cong 60,3\%$). Deoarece modificarea turației se face la $n_2 \cong 0,968 n_0$ adică în intervalul de 20% din turația nominală, se poate considera $\eta_{F_2} \cong \eta_{F_{omolog_2}} = 0,603$.

② Puterea electrică P_{F_j} consumată pentru pompare de către fiecare pompă, unde $j \in \{1; 2\}$, este definită prin relația (1.34):

$$P_{F_1} = \frac{\rho g Q_{F_1} H_{F_1}}{\eta_{F_1}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0138 \cdot 37,5}{0,615} = 8414,6 \text{ W};$$

$$P_{F_2} = \frac{\rho g Q_{F_2} H_{F_2}}{\eta_{F_2}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0122 \cdot 37,18}{0,603} = 7522,3 \text{ W}.$$

Puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , este suma puterilor consumate de cele două pompe:

$$P = P_{F1} + P_{F2} = 15938 \text{ W} \cong 15,9 \text{ kW}.$$

Problema 3.3. Funcționarea cu turație variabilă a turbopompelor cuplate în paralel, astfel încât în instalație să fie asigurat debitul cerut, sau înălțimea de pompare cerută (calcul numeric)

Se consideră două pompe centrifuge identice, notate $\mathbf{P}_1$ și $\mathbf{P}_2$, montate în paralel într-o instalație hidraulică ca cea din figura 3.3 (în care nodurile $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ delimitează cuplajul paralel).

Pe suprafața liberă a rezervorului de aspirație, viteza apei este $v_i \cong 0$, iar înălțimea dată de presiunea absolută este $p_i/\rho g = 10 \text{ m}$. Pe suprafața liberă a rezervorului de refulare, viteza apei este $v_e \cong 0$, iar înălțimea dată de presiunea absolută este $p_e/\rho g = 15 \text{ m}$. Înălțimea geodezică are valoarea $H_g = 18 \text{ m}$. Modulul de rezistență hidraulică al magistralei de aspirație este $M_a = 5000 \text{ s}^2/\text{m}^5$ (vezi figura 3.3), iar modulul de rezistență hidraulică al magistralei de refulare este $M_r = 14000 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Pe fiecare traseu hidraulic care leagă nodurile $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$, modulul de rezistență hidraulică are aceeași valoare, anume: $M_1 = M_2 = 9000 \text{ s}^2/\text{m}^5$. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Pompa $\mathbf{P}_1$ funcționează cu turația n_1 constantă, egală cu turația nominală: $n_1 = n_0 = 1450 \text{ rot/min}$. Pompa $\mathbf{P}_2$ funcționează cu turație n_2 variabilă, de exemplu: $n_2 \leq n_0$.

Curbele caracteristice ale pompelor la turația nominală n_0 , anume: caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ și caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$, sunt approximate prin **funcții polinomiale de gradul al doilea**, care depind de debitul $Q_0 \in [0; 0,02] \text{ m}^3/\text{s}$, astfel:

- caracteristica energetică: $H_0 = 50 - 65000 Q_0^2 \text{ [m]}$;
- caracteristica de randament: $\eta_0 = 82,5 Q_0 - 2750 Q_0^2 \text{ [-]}$;

Se cere:

- ① Să se determine prin **calcul numeric** la ce turație n_2 trebuie să fie antrenată pompa $\mathbf{P}_2$, astfel încât prin cuplarea în paralel a pompelor $\mathbf{P}_1$ și $\mathbf{P}_2$, debitul de apă tranzitat pe magistrala de refulare să aibă valoarea $Q = 0,026 \text{ m}^3/\text{s}$;
- ② Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , în kW.

Rezolvare

① Pompa $\mathbf{P}_1$ funcționează cu turația n_1 egală cu turația nominală: $n_1 = n_0$, deci curbele caracteristice energetice și de randament ale pompei $\mathbf{P}_1$ sunt identice cu curbele caracteristice date în enunțul problemei pentru turația nominală n_0 , anume: $H_1 = H_1(Q_1) \equiv H_0(Q_0)$ și $\eta_1 = \eta_1(Q_1) \equiv \eta_0(Q_0)$, rezultând:

$$H_1 = H_1(Q_1) = 50 - 65000 Q_1^2 \text{ [m]}, \quad (3.11)$$

respectiv

$$\eta_1 = \eta_1(Q_1) = 82,5 Q_1 - 2750 Q_1^2 \text{ [-]}. \quad (3.12)$$

Pompa $\mathbf{P}_2$ funcționează cu turație n_2 variabilă, $n_2 \leq n_0$. În cele ce urmează, se va nota cu r raportul celor două turații: $r = n_2/n_0$. Curba caracteristică energetică $H_2 = H_2(Q_2)$ a pompei $\mathbf{P}_2$ poate fi definită cu ajutorul relațiilor de similitudine (1.37) și (1.38), în care **raportul debitelor** este:

$$\frac{Q_2}{Q_0} = \frac{n_2}{n_0}, \text{ deci } Q_2 = \frac{n_2}{n_0} Q_0 = r Q_0, \quad (3.13)$$

iar **raportul înălțimilor de pompare** este:

$$\frac{H_2}{H_0} = \left(\frac{n_2}{n_0} \right)^2, \text{ deci } H_2 = \left(\frac{n_2}{n_0} \right)^2 H_0 = r^2 H_0, \quad (3.14)$$

unde în acest caz, $H_0 = H_0(Q_0) = (50 - 65000 Q_0^2) \text{ [m]}$. Din relația (3.14), se obține expresia curbei caracteristice energetice a pompei $\mathbf{P}_2$:

$$H_2 = H_2(Q_2) = r^2 (50 - 65000 Q_0^2) = 50 r^2 - 65000 Q_2^2. \quad (3.15)$$

Pentru configurația geometrică a instalației din figura 3.3, **legea energiei** (1.52) **se poate scrie pe ambele trasee hidraulice** care leagă punctul $\mathbf{i}$ (de intrare în sistem) și punctul $\mathbf{e}$ (de ieșire din sistem). Astfel, pentru traseele hidraulice definite de punctele $\mathbf{i-A-P_j-B-e}$ rezultă:

$$H_i + H_j(Q_j) = H_e + h_{r_{i-A-P_j-B-e}}, \text{ cu } j \in \{1; 2\}, \quad (3.16)$$

unde $H_1 = H_1(Q_1)$ și $H_2 = H_2(Q_2)$ sunt definite analitic prin expresiile (3.11) și (3.15).

Explicitând sarcinile hidrodinamice H_i , respectiv H_e (cu vitezele v_i și v_e nule) și utilizând relația (1.22) de definiție a înălțimii statice H_s ,

$$H_s = \frac{p_e - p_i}{\rho g} + H_g = (15 - 10) + 18 = 23 \text{ m},$$

sistemul (3.16) devine:

$$H_j(Q_j) = H_s + h_{r_{i-A}} + h_{r_{A-P_j-B}} + h_{r_{B-e}}, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}. \quad (3.17)$$

Cu notațiile din figura 3.3 și cu valorile modulelor de rezistență hidraulică din această problemă, pierderile de sarcină hidraulică din (3.17) pot fi exprimate astfel:

- pierderile de sarcină hidraulică aferente conductelor magistrale (instalației), notate h_r

$$h_r = h_{r_{i-A}} + h_{r_{B-e}} = (M_a + M_r)Q^2 = MQ^2 = 19000 Q^2; \quad (3.18)$$

- pierderile de sarcină hidraulică pe conductele care conectează pompa P_j la nodurile **A** și **B**,

$$h_{r_{A-P_j-B}} = M_j Q_j^2 = 9000 Q_j^2, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}. \quad (3.19)$$

Cu (3.18) și (3.19), respectiv prin rearanjarea termenilor, sistemul (3.17) devine:

$$H_j(Q_j) - M_j Q_j^2 = H_s + MQ^2, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}. \quad (3.20)$$

Membrul stâng al relației (3.20) reprezintă **caracteristica energetică redusă a pompei P_j** :

$$H_{red_j}(Q_j) = H_j(Q_j) - M_j Q_j^2 = H_j(Q_j) - 9000 Q_j^2, \quad \text{cu } j \in \{1; 2\}, \quad (3.21)$$

iar membrul drept reprezintă **caracteristica instalației**, care în acest caz se scrie:

$$H_{inst}(Q) = H_s + MQ^2 = 23 + 19000 Q^2. \quad (3.22)$$

Adăugând la (3.20) și ecuația continuității (aplicată în nodurile **A** sau **B**), **pentru cuplarea în paralel a celor două pompe se poate scrie următorul sistem de ecuații**:

$$\begin{cases} Q = Q_1 + Q_2 \\ H_{red1}(Q_1) = H_{inst}(Q) \\ H_{red2}(Q_2) = H_{inst}(Q) \end{cases} \quad (3.23)$$

Ținând seama de relațiile (3.11), (3.15), (3.21) și (3.22), sistemul (3.23) devine:

$$\begin{cases} Q = Q_1 + Q_2 \\ 50 - 65000 Q_1^2 - 9000 Q_1^2 = 23 + 19000 (Q_1 + Q_2)^2 \\ 50 r^2 - 65000 Q_2^2 - 9000 Q_2^2 = 23 + 19000 (Q_1 + Q_2)^2 \end{cases} \quad (3.24)$$

În punctele de funcționare energetică (punctul **F** aferent cuplajului în paralel, respectiv punctele **F₁** și **F₂** aferente funcționării fiecărei pompe), sistemul (3.24) se scrie astfel:

$$\begin{cases} Q_F = Q_{F1} + Q_{F2} \\ 50 - 74000 Q_{F1}^2 = 23 + 19000 (Q_{F1} + Q_{F2})^2 \\ 50 r^2 - 74000 Q_{F2}^2 = 23 + 19000 (Q_{F1} + Q_{F2})^2 \end{cases} \quad (3.25)$$

În această problemă s-a impus valoarea debitului de apă care trebuie să fie tranzitat pe magistrala de refulare la funcționarea în paralel a pompelor **P₁** și **P₂**. Aceasta înseamnă că în

punctul de funcționare energetică F al cuplajului în paralel al celor două pompe, trebuie asigurat debitul: $Q = Q_F = 0,026 \text{ m}^3/\text{s}$. Cu această valoare, sistemul (3.25) devine:

$$\begin{cases} Q_{F1} + Q_{F2} = 0,026 \\ 50 - 74000 Q_{F1}^2 = 23 + 19000 \cdot 0,026^2 = 35,844 \\ 50 r^2 - 74000 Q_{F2}^2 = 23 + 19000 \cdot 0,026^2 = 35,844 \end{cases},$$

adică

$$\begin{cases} f_1 = Q_{F1} + Q_{F2} - 0,026 = 0 \\ f_2 = 14,156 - 74000 Q_{F1}^2 = 0 \\ f_3 = 50 r^2 - 74000 Q_{F2}^2 - 35,844 = 0 \end{cases}. \quad (3.26)$$

Datorită **forme simple** a polinomului (3.11), polinom de gradul 2 **fără termen proporțional cu debitul la puterea întâi**, sistemul de ecuații neliniare (3.26) obținut aici **poate fi rezolvat analitic**, astfel:

- din a doua ecuație se calculează debitul pompei **P₁**: $Q_{F1} = \sqrt{14,156/74000} = 0,0138 \text{ m}^3/\text{s}$;
- din prima ecuație rezultă debitul pompei **P₂**: $Q_{F2} = 0,026 - Q_{F1} = 0,0122 \text{ m}^3/\text{s}$;
- din a treia ecuație rezultă raportul turațiilor: $r = \sqrt{(74000 Q_{F2}^2 + 35,844)/50} = 0,9675$ cu care se calculează turația pompei **P₂**: $n_2 = 0,9675 n_0 = 0,9675 \cdot 1450 \cong 1403 \text{ rot/min}$.

Curba caracteristică energetică a unei pompe centrifuge poate fi aproximată și printr-un **polinom de gradul al doilea de formă generală**, $H(Q) = c_0 + c_1 Q + c_2 Q^2$, un polinom cu trei termeni, în care c_0 , c_1 și c_2 sunt coeficienții polinomului. Pentru cazul în care curba caracteristică energetică $H_1(Q_1)$ ar fi fost exprimată cu un astfel de polinom de gradul 2 cu trei termeni, sistemul de trei ecuații obținut, de tipul sistemului (3.26), **ar fi necesitat soluționare numerică**.

Pentru a familiariza cititorul cu metodologia de calcul, în cele ce urmează, sistemul de ecuații (3.26) va fi **soluționat numeric**.

Pentru rezolvarea numerică a sistemului de ecuații neliniare (3.26), cu trei necunoscute (Q_{F1} , Q_{F2} și r), variabilele sistemului vor fi asociate cu componentele w_1 , w_2 și w_3 ale unui vector notat $\mathbf{w}$, unde $w_1 \equiv Q_{F1}$, $w_2 \equiv Q_{F2}$, respectiv $w_3 \equiv r$.

Astfel, sistemul (3.26) devine:

$$\begin{cases} f_1 = w_1 + w_2 - 0,026 = 0 \\ f_2 = 14,156 - 74000 w_1^2 = 0 \\ f_3 = 50 w_3^2 - 74000 w_2^2 - 35,844 = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Rezolvarea sistemului (3.27), de trei ecuații neliniare cu trei necunoscute w_j , unde $j \in \{1; 2; 3\}$, se poate efectua cu ajutorul unui software de calcul numeric specializat, de exemplu cu **MATLAB**[®] [37, paginile 191-193], sau cu **GNU Octave** [6, paginile 469-471], în care sistemele de ecuații neliniare pot fi rezolvate utilizând funcția *built-in* denumită **fsolve**. În cele ce urmează, vor fi prezentate etapele și liniile de comandă care permit **rezolvarea sistemului de ecuații neliniare (3.27) în MATLAB[®] și GNU Octave**:

- în codul numeric, se consideră vectorul coloană $\mathbf{w}$, cu treicomponente: $w(1)$, $w(2)$ și $w(3)$, aferente variabilelor Q_{F1} , Q_{F2} și r , respectiv se consideră vectorul coloană $\mathbf{f}$, cu trei componente: $f(1)$, $f(2)$ și $f(3)$, aferente funcțiilor f_1 , f_2 și f_3 din (3.27);
- în tabelul 3.5 este prezentată funcția definită de către utilizator, denumită de exemplu **sistem33.m**, în cadrul căreia este scris sistemul de ecuații neliniare (3.27);

Tabel 3.5. – Funcția *sistem33.m* definită în MATLAB[®] și în GNU Octave

în MATLAB [®]	<pre>function f = sistem33(w) f(1) = w(1) + w(2) - 0.026; f(2) = 14.156 - 74000 * w(1)^2; f(3) = 50 * w(3)^2 - 74000 * w(2)^2 - 35.844;</pre>
în GNU Octave	<pre>function f = sistem33(w) f(1) = w(1) + w(2) - 0.026; f(2) = 14.156 - 74000 * w(1)^2; f(3) = 50 * w(3)^2 - 74000 * w(2)^2 - 35.844; endfunction</pre>

- se alege o aproximație de start pentru variabilele Q_{F1} , Q_{F2} și r , definită prin vectorul coloană $\mathbf{w0}$, cu componente $w0(1) = w0(2) = 0.01$ (valori intuitive pentru debite, egale cu $0,01 \text{ m}^3/\text{s}$) și $w0(3) = 0.8$ (valoare intuitivă pentru raportul turațiilor, egal cu 0,8);
- în tabelul 3.6 sunt prezentate cele două linii simple de comandă, scrise identic în MATLAB[®] și în GNU Octave, care permit soluționarea sistemului de ecuații (3.27). Soluția obținută pentru sistemul (3.27) este de asemenea prezentată în tabelul 3.6.

Tabel 3.6. – Liniile de comandă și soluția obținută în MATLAB® și în GNU Octave

$w0 = [0.01; 0.01; 0.8];$ $w = \text{fsolve}(@\text{sistem33}, w0)$
$w =$ 0.01383 0.01217 0.96749

Având în vedere modul de declarare a variabilelor în cadrul calcului numeric efectuat în MATLAB® și în GNU Octave, soluția căutată se citește astfel:

$$w(1) = Q_{F1} \cong 0,0138 \text{ m}^3/\text{s}, \quad w(2) = Q_{F2} \cong 0,0122 \text{ m}^3/\text{s} \quad \text{și} \quad w(3) = r = n_2/n_0 \cong 0,9675.$$

Deci turația n_2 are valoarea: $n_2 = 0,9675 n_0 \cong 1403 \text{ rot/min}$.

Pe baza valorilor debitelor Q_{F1} și Q_{F2} [m^3/s], se pot calcula valorile înălțimilor de pompare asigurate de pompe în punctele de funcționare energetică F_1 și F_2 :

$$H_{F1} = 50 - 65000 Q_{F1}^2 = 50 - 65000 \cdot 0,0138^2 = 37,62 \text{ m};$$

$$H_{F2} = 50 r^2 - 65000 Q_{F2}^2 = 50 \cdot 0,9675^2 - 65000 \cdot 0,0122^2 = 37,13 \text{ m}.$$

Din ecuația curbei caracteristice de randament (3.12) a pompei P_1 , se calculează valoarea randamentului corespunzător funcționării acestei pompe:

$$\eta_{F1} = 82,5 Q_{F1} - 2750 Q_{F1}^2 = 82,5 \cdot 0,0138 - 2750 \cdot 0,0138^2 \cong 0,615.$$

Randamentul η_{F2} cu care funcționează pompa P_2 (la turația $n_2 < n_0$), poate fi determinat pe baza **punctului omolog de funcționare**, notat F_{omolog_2} – un punct situat pe caracteristica de sarcină $H_0 = H_0(Q_0)$ la turația nominală n_0 , punct în care regimul de funcționare al pompei la turație nominală este similar celui din punctul funcționare energetică F_2 al pompei cu turație $n_2 = 0,9675 n_0$. În punctul F_{omolog_2} , debitul este notat $Q_{F_{\text{omolog}_2}}$; acest debit se poate calcula utilizând relația de similitudine pentru debite (1.37):

$$Q_{F_{\text{omolog}_2}} = \frac{n_0}{n_2} Q_{F2} = \frac{1}{0,9675} 0,0122 \cong 0,0126 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Pentru valoarea debitului $Q_{F_{\text{omolog}_2}}$, se calculează randamentul $\eta_{F_{\text{omolog}_2}}$ din ecuația caracteristicii de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$:

$$\begin{aligned}\eta_{F_{omolog_2}} &= \eta_0(Q_{F_{omolog_2}}) = 82,5 Q_{F_{omolog_2}} - 2750 Q_{F_{omolog_2}}^2 = \\ &= 82,5 \cdot 0,0126 - 2750 \cdot 0,0126^2 \cong 0,603.\end{aligned}$$

Deoarece modificarea turației se face la $n_2 = 0,9675 n_0$ adică în intervalul de 20% din turația nominală, se poate considera $\eta_{F_2} \cong \eta_{F_{omolog_2}} = 0,603$.

② Puterea electrică P_{F_j} consumată pentru pompare de către fiecare pompă, unde $j \in \{1; 2\}$, este definită prin relația (1.34):

$$\begin{aligned}P_{F_1} &= \frac{\rho g Q_{F_1} H_{F_1}}{\eta_{F_1}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0138 \cdot 37,62}{0,615} = 8441,6 \text{ W}; \\ P_{F_2} &= \frac{\rho g Q_{F_2} H_{F_2}}{\eta_{F_2}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0122 \cdot 37,13}{0,603} = 7512,2 \text{ W}.\end{aligned}$$

Puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , este suma puterilor consumate de cele două pompe:

$$P = P_{F_1} + P_{F_2} = 15954 \text{ W} \cong 15,95 \text{ kW}.$$

Se precizează faptul că **în prezenta problemă 3.3. a fost soluționat numeric același caz ca și cel definit în problema 3.2., unde metoda de calcul a fost una grafo-analitică.** Perechile de valori $\{Q_0, H_0\}$ și $\{Q_0, \eta_0\}$, ale caracteristicilor energetice și de randament din tabelul 3.3, sunt generate cu funcțiile polinomiale date în problema 3.3, anume: $H_0 = (50 - 65000 Q_0^2)$ [m], respectiv $\eta_0 = 100(82,5 Q_0 - 2750 Q_0^2)$ [%].

Se constată că există mici diferențe între rezultatele obținute cu cele două metode. Ținând seama de observațiile efectuate la finalul problemei 2.5.4, din capitolul 2, se reamintește aici numai faptul că aproximarea curbilor caracteristice ale pompelor cu funcții de tipul celor prezentate și apoi rezolvarea numerică duce la erori comparabile cu cele obținute cu metoda grafo-analitică.

Problema 3.4. Funcționarea energetică a mai multor turbopompe cuplate în paralel, cu multiple noduri de distribuție, respectiv de colectare

Se consideră trei pompe centrifuge identice, notate P_1 , P_2 și P_3 , montate în paralel în instalația hidraulică din figura 3.5 (pompele sunt montate între nodurile A_1 , A_2 din amonte și B_1 , B_2 din

aval; magistrala de aspirație este amonte de nodul A_1 , iar magistrala de refulare este aval de nodul B_2). Toate pompele funcționează la turație nominală.

Rezervoarele sunt deschise la presiunea atmosferică. Pe suprafața liberă a acestora, viteza apei este nulă ($v_i = v_e \cong 0$), înălțimea dată de presiunea absolută este $p_i/\rho g = p_e/\rho g = 10\text{ m}$, iar cotele sunt: $z_i = 2\text{ m}$ și $z_e = 20\text{ m}$. Modulul de rezistență hidraulică al magistralei de aspirație este $M_a = 6000\text{ s}^2/\text{m}^5$. Modulul de rezistență hidraulică al magistralei de refulare este $M_r = 10000\text{ s}^2/\text{m}^5$. Celelalte conducte din instalație au următoarele valori ale modulelor de rezistență hidraulică (vezi notațiile din figura 3.5): $M_1 = 8000\text{ s}^2/\text{m}^5$, $M_2 = 7000\text{ s}^2/\text{m}^5$, $M_3 = 9000\text{ s}^2/\text{m}^5$, respectiv $M_4 = M_5 = 2000\text{ s}^2/\text{m}^5$. Densitatea apei este $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10\text{ m/s}^2$.

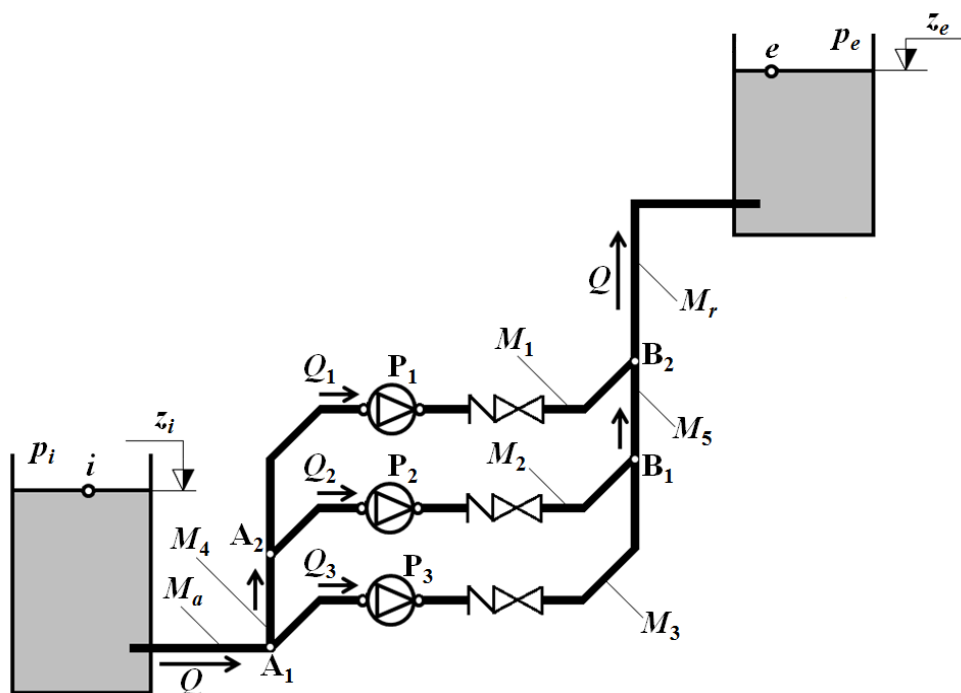


Fig. 3.5. – Schema instalației hidraulice cu trei pompe centrifuge montate în paralel

Curbele caracteristice ale pompelor P_j la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, unde $j \in \{1; 2; 3\}$, sunt date **sub formă tabelară** în tabelul 3.7, pe perechi de valori $\{Q_j, H_j\}$ și $\{Q_j, \eta_j\}$, pentru valori discrete ale debitului $Q_j \in [0; 0,02]\text{ m}^3/\text{s}$.

Tabel 3.7. – Perechile de valori date: $\{Q_j, H_j\}$ și $\{Q_j, \eta_j\}$

Q_j [m ³ /s]	0	0,002	0,004	0,006	0,01	0,016	0,02
H_j [m]	44,85	44,8	44,5	44	42	37,4	33
η_j [%]	0	15	28	39	55	64	60

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitelor Q_{Fj} [m³/s], înălțimilor de pompare H_{Fj} [m] și randamentelor η_{Fj} [–], în punctele de funcționare energetică F_j ale pompelor, unde $j \in \{1; 2; 3\}$;
- ② Să se determine valorile debitului Q_F [m³/s] și înălțimii de pompare H_F [m], în punctul de funcționare energetică F al cuplajului în paralel al celor trei pompe;
- ③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , în kW.

Rezolvare

① Pentru configurația geometrică a instalației din figura 3.5, **metoda de calcul grafo-analitică este complicat de aplicat**, datorită existenței conductelor de legătură dintre nodurile A_1 și A_2 , respectiv B_1 și B_2 .

Pentru a soluționa problema numeric, este necesară aproximarea curbelor caracteristice ale pompelor, $H_j = H_j(Q_j)$ și $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, prin **funcții polinomiale de gradul al doilea**, care depind de debitul $Q_j \in [0; 0,02]$ m³/s, unde $j \in \{1; 2; 3\}$.

Pentru a determina o curbă de regresie polinomială de gradul 2, poate fi aplicată **metoda celor mai mici pătrate a lui Gauss** [20, paginile 38-39 și 44], metodă implementată în numeroase tipuri de software de calcul numeric specializat, de exemplu **MATLAB**[®] [37, paginile 145-149], sau **GNU Octave** [6, paginile 602-611], în care poate fi utilizată funcția *built-in* denumită **polyfit** [20, paginile 43-44].

În cele ce urmează, vor fi prezentate etapele și liniile de comandă care permit **aproximarea curbelor caracteristice ale pompelor prin regresii polinomiale de gradul 2** (pe baza perechilor de valori $\{Q_j, H_j\}$ și $\{Q_j, \eta_j\}$ din tabelul 3.7), **în MATLAB[®] și GNU Octave**:

- se introduc în codul numeric (vezi tabelul 3.8) valorile discrete ale debitelor (notate Q_j), înălțimilor de pompare (notate H_j) și randamentelor (notate η_j), din tabelul 3.7;

Tabel 3.8. – Introducerea datelor în MATLAB® și în GNU Octave

$Q_j = [0 \ 0.002 \ 0.004 \ 0.006 \ 0.01 \ 0.016 \ 0.02];$ $H_j = [44.85 \ 44.8 \ 44.5 \ 44 \ 42 \ 37.4 \ 33];$ $\eta_{j} = [0 \ 15 \ 28 \ 39 \ 55 \ 64 \ 60];$

- se urmărește obținerea unor **polinoame de gradul 2** cu următoarea formă generală:

$$\begin{aligned} H_j(Q_j) &= a_3 + a_2 Q_j + a_1 Q_j^2; \\ \eta_j(Q_j) &= b_3 + b_2 Q_j + b_1 Q_j^2, \end{aligned} \quad (3.28)$$

în care coeficienții polinoamelor a_k și b_k , cu $k \in \{1; 2; 3\}$, au fost numerotați indicial în ordinea în care vor fi furnizați de către funcția **polyfit**. În tabelul 3.9 sunt prezentate liniile de comandă care permit determinarea coeficienților polinoamelor (3.28), drept componente ale vectorilor **a** și **b**, unde $a(k) = a_k$ și $b(k) = b_k$. Valorile obținute pentru coeficienții polinoamelor sunt de asemenea incluse în tabelul 3.9.

Tabel 3.9. – Liniile de comandă și soluția obținută în MATLAB® și în GNU Octave

$a = \text{polyfit}(Q_j H_j, 2)$ $a =$ $1.0e + 04 *$ $-3.1336 \quad 0.0034 \quad 0.0045$
$b = \text{polyfit}(Q_j \eta_j, 2)$ $b =$ $1.0e + 05 *$ $-2.5000 \quad 0.0800 \quad 0.0000$

Având în vedere modul de declarare a coeficienților polinoamelor, în cadrul calcului numeric efectuat în MATLAB® și în GNU Octave, soluția obținută se citește astfel:

$$a(1) = a_1 = -31336; \quad a(2) = a_2 = 34; \quad a(3) = a_3 = 45;$$

$$b(1) = b_1 = -250000; \quad b(2) = b_2 = 8000; \quad b(3) = b_3 = 0,$$

iar funcțiile polinomiale de gradul al doilea care aproximează curba caracteristică energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și curba caracteristică de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$ se scriu:

$$H_j = H_j(Q_j) = 45 + 34Q_j - 31336Q_j^2 \text{ [m]}, \quad \text{cu } j \in \{1; 2; 3\}, \quad (3.29)$$

respectiv

$$\eta_j = \eta_j(Q_j) = 8000 Q_j - 250000 Q_j^2 [\%], \text{ cu } j \in \{1; 2; 3\}. \quad (3.30)$$

În figura 3.6 sunt trasate cele două curbe caracteristice ale pompelor, approximate prin funcțiile polinomiale (3.29) și (3.30), alături de perechile de valori $\{Q_j, H_j\}$ și $\{Q_j, \eta_j\}$ din tabelul 3.7.

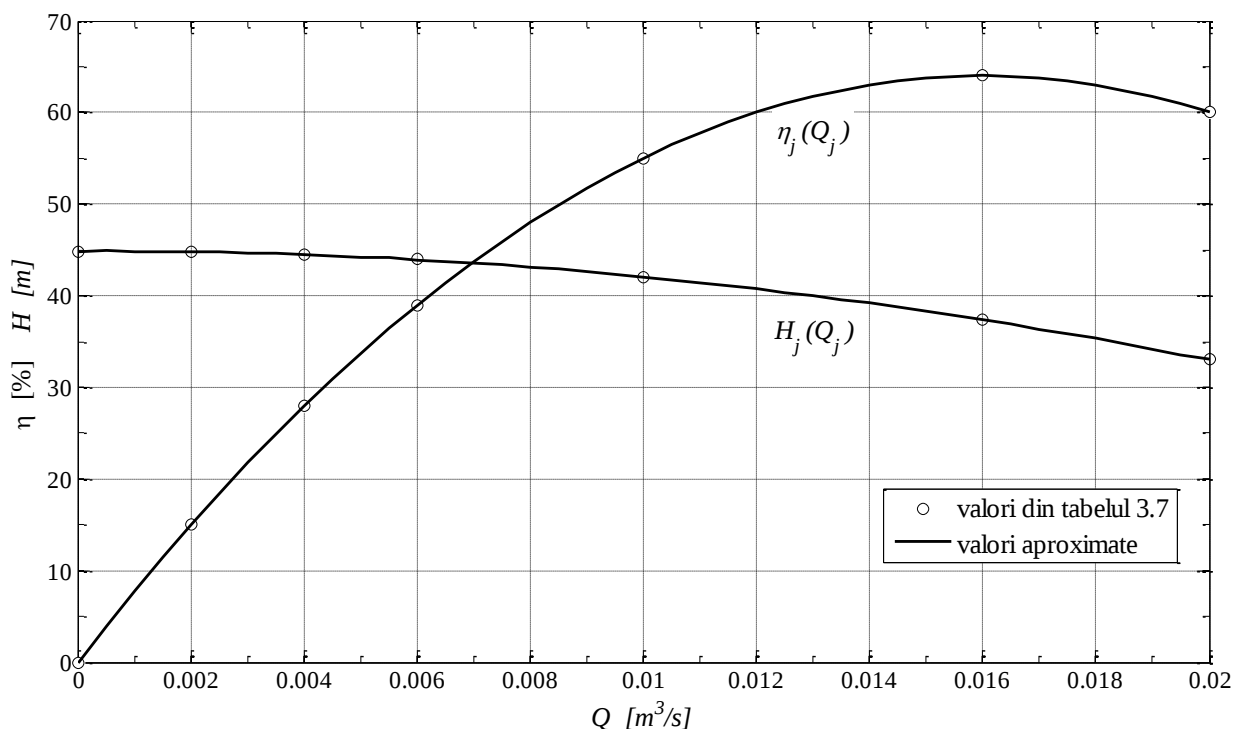


Fig. 3.6. – Curbele caracteristice ale pompelor, definite prin puncte în tabelul 3.7, respectiv approximate prin funcțiile polinomiale (3.29) și (3.30)

Pentru configurația geometrică a instalației din figura 3.5, **legea energiei** (1.52) se poate scrie pe cele 3 trasee hidraulice care leagă punctul **i** (de intrare în sistem) și punctul **e** (de ieșire din sistem), astfel:

$$\begin{cases} H_i + H_1(Q_1) = H_e + h_{r_{i-A_1}} + h_{r_{A_1-A_2}} + h_{r_{A_2-P_1-B_2}} + h_{r_{B_2-e}} \\ H_i + H_2(Q_2) = H_e + h_{r_{i-A_1}} + h_{r_{A_1-A_2}} + h_{r_{A_2-P_2-B_1}} + h_{r_{B_1-B_2}} + h_{r_{B_2-e}} \\ H_i + H_3(Q_3) = H_e + h_{r_{i-A_1}} + h_{r_{A_1-P_3-B_1}} + h_{r_{B_1-B_2}} + h_{r_{B_2-e}} \end{cases} \quad (3.31)$$

La legea energiei, se adaugă **ecuația continuității**:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \quad (3.32)$$

Explicitând sarcinile hidrodinamice H_i , respectiv H_e (cu vitezele v_i și v_e nule) și utilizând relația (1.22) de definiție a înălțimii statice H_s ,

$$H_s = \frac{P_e - P_i}{\rho g} + (z_e - z_i) = (10 - 10) + (20 - 2) = 18 \text{ m},$$

sistemul (3.31) devine:

$$\begin{cases} H_1(Q_1) - h_{r A_2 - P_1 - B_2} - h_{r A_1 - A_2} = H_s + h_{r i - A_1} + h_{r B_2 - e} \\ H_2(Q_2) - h_{r A_2 - P_2 - B_1} - h_{r A_1 - A_2} - h_{r B_1 - B_2} = H_s + h_{r i - A_1} + h_{r B_2 - e} \\ H_3(Q_3) - h_{r A_1 - P_3 - B_1} - h_{r B_1 - B_2} = H_s + h_{r i - A_1} + h_{r B_2 - e} \end{cases} \quad (3.33)$$

Cu notațiile din figura 3.5 și cu valorile modulelor de rezistență hidraulică din această problemă, pierderile de sarcină hidraulică din (3.33) pot fi exprimate astfel:

- pierderile de sarcină hidraulică aferente conductelor magistrale (instalației), notate h_r :

$$h_r = h_{r i - A_1} + h_{r B_2 - e} = (M_a + M_r) Q^2 = M Q^2 = 16000 Q^2; \quad (3.34)$$

- pierderile de sarcină hidraulică pe conductele pe care se află pompele:

$$\begin{aligned} h_{r A_2 - P_1 - B_2} &= M_1 Q_1^2 = 8000 Q_1^2; \\ h_{r A_2 - P_2 - B_1} &= M_2 Q_2^2 = 7000 Q_2^2; \\ h_{r A_1 - P_3 - B_1} &= M_3 Q_3^2 = 9000 Q_3^2; \end{aligned} \quad (3.35)$$

- pierderile de sarcină hidraulică aferente conductelor de legătură, dintre nodurile A_1 și A_2 , respectiv B_1 și B_2 :

$$\begin{aligned} h_{r A_1 - A_2} &= M_4 (Q - Q_3)^2 = M_4 (Q_1 + Q_2)^2 = 2000 (Q_1 + Q_2)^2; \\ h_{r B_1 - B_2} &= M_5 (Q_2 + Q_3)^2 = 2000 (Q_2 + Q_3)^2, \end{aligned} \quad (3.36)$$

în care s-a ținut seama de ecuația continuității (3.32).

Membrul drept al sistemului (3.33) reprezintă **caracteristica instalației**, care ținând seama de expresia (3.34), se scrie:

$$H_{inst}(Q) = H_s + M Q^2 = 18 + 16000 Q^2. \quad (3.37)$$

Ținând seama de relațiile (3.35) și (3.36) pentru calculul pierderilor de sarcină hidraulică, precum și de relația (3.37), sistemul de ecuații (3.33) devine:

$$\begin{cases} H_1(Q_1) - 8000 Q_1^2 - 2000 (Q_1 + Q_2)^2 = 18 + 16000 Q^2 \\ H_2(Q_2) - 7000 Q_2^2 - 2000 (Q_1 + Q_2)^2 - 2000 (Q_2 + Q_3)^2 = 18 + 16000 Q^2, \\ H_3(Q_3) - 9000 Q_3^2 - 2000 (Q_2 + Q_3)^2 = 18 + 16000 Q^2 \end{cases} \quad (3.38)$$

care, ținând seama de (3.29), se scrie:

$$\begin{cases} 45 + 34Q_1 - 39336 Q_1^2 - 2000 (Q_1 + Q_2)^2 = 18 + 16000 Q^2 \\ 45 + 34Q_2 - 38336 Q_2^2 - 2000 (Q_1 + Q_2)^2 - 2000 (Q_2 + Q_3)^2 = 18 + 16000 Q^2 . \\ 45 + 34Q_3 - 40336 Q_3^2 - 2000 (Q_2 + Q_3)^2 = 18 + 16000 Q^2 \end{cases} \quad (3.39)$$

Considerând ecuația continuității (3.32), sistemul (3.39) se reduce la următorul sistem de 3 ecuații cu 3 necunoscute (anume Q_1 , Q_2 și Q_3):

$$\begin{cases} f_1 = 27 + 34Q_1 - 39336 Q_1^2 - 2000 (Q_1 + Q_2)^2 - 16000 (Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 0 \\ f_2 = 27 + 34Q_2 - 38336 Q_2^2 - 2000 (Q_1 + Q_2)^2 - 2000 (Q_2 + Q_3)^2 - \\ - 16000 (Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 0 \\ f_3 = 27 + 34Q_3 - 40336 Q_3^2 - 2000 (Q_2 + Q_3)^2 - 16000 (Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 0 \end{cases} . \quad (3.40)$$

Soluția sistemului de ecuații neliniare (3.40) reprezintă valorile Q_{F1} , Q_{F2} și Q_{F3} [m^3/s], aferente debitelor vehiculate de către fiecare pompă în punctul de funcționare energetică F_j , unde $j \in \{1; 2; 3\}$.

Rezolvarea sistemului (3.40), de trei ecuații neliniare cu trei necunoscute Q_j , unde $j \in \{1; 2; 3\}$, se poate efectua cu ajutorul unui software de calcul numeric specializat, de exemplu cu **MATLAB**[®] [37, paginile 191-193], sau cu **GNU Octave** [6, paginile 469-471], în care sistemele de ecuații neliniare pot fi rezolvate utilizând funcția *built-in* denumită **fsolve**.

În cele ce urmează, vor fi prezentate etapele și liniile de comandă care permit **rezolvarea sistemului de ecuații neliniare (3.40) în MATLAB[®] și GNU Octave**:

- în codul numeric, se consideră vectorul coloană **Q**, cu trei componente: $Q(1)$, $Q(2)$ și $Q(3)$, aferente variabilelor Q_1 , Q_2 și Q_3 , respectiv se consideră vectorul coloană **f**, cu trei componente: $f(1)$, $f(2)$ și $f(3)$, aferente funcțiilor f_1 , f_2 și f_3 din (3.40);
- în tabelul 3.10. este prezentată funcția definită de către utilizator, denumită de exemplu **sistem34.m**, în cadrul căreia este scris sistemul de ecuații neliniare (3.40);
- se alege o aproximație de start pentru variabilele Q_1 , Q_2 și Q_3 , definită prin vectorul coloană **Q0**, cu componente $Q0(1)=Q0(2)=Q0(3)=0.01$ (valori intuitive pentru debite, egale cu $0,01m^3/s$);
- în tabelul 3.11 sunt prezentate cele două linii simple de comandă, scrise identic în **MATLAB**[®] și în **GNU Octave**, care permit soluționarea sistemului de ecuații (3.40). Soluția obținută pentru sistemul (3.40) este de asemenea prezentată în tabelul 3.11.

Tabel 3.10. – Funcția sistem34.m definită în MATLAB® și în GNU Octave

în MATLAB®:
<pre>function f = sistem34(Q) f(1) = 27 + 34 * Q(1) - 39336 * Q(1)^2 - 2000 * (Q(1) + Q(2))^2 - 16000 * (Q(1) + Q(2) + Q(3))^2; f(2) = 27 + 34 * Q(2) - 38336 * Q(2)^2 - 2000 * (Q(1) + Q(2))^2 - 2000 * (Q(2) + Q(3))^2 - 16000 * (Q(1) + Q(2) + Q(3))^2; f(3) = 27 + 34 * Q(3) - 40336 * Q(3)^2 - 2000 * (Q(2) + Q(3))^2 - 16000 * (Q(1) + Q(2) + Q(3))^2;</pre>
în GNU Octave:
<pre>function f = sistem34(Q) f(1) = 27 + 34 * Q(1) - 39336 * Q(1)^2 - 2000 * (Q(1) + Q(2))^2 - 16000 * (Q(1) + Q(2) + Q(3))^2; f(2) = 27 + 34 * Q(2) - 38336 * Q(2)^2 - 2000 * (Q(1) + Q(2))^2 - 2000 * (Q(2) + Q(3))^2 - 16000 * (Q(1) + Q(2) + Q(3))^2; f(3) = 27 + 34 * Q(3) - 40336 * Q(3)^2 - 2000 * (Q(2) + Q(3))^2 - 16000 * (Q(1) + Q(2) + Q(3))^2; endfunction</pre>

Tabel 3.11. – Liniile de comandă și soluția obținută în MATLAB® și în GNU Octave

<pre>Q0 = [0.01; 0.01; 0.01]; Q = fsolve(@sistem34, Q0)</pre>
<pre>Q = 0.0123 0.0112 0.0122</pre>

Având în vedere modul de declarare a variabilelor în cadrul calcului numeric efectuat în MATLAB® și în GNU Octave, soluția căutată se citește astfel:

$$Q(1) = Q_{F1} = 0,0123 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q(2) = Q_{F2} = 0,0112 \text{ m}^3/\text{s} \text{ și } Q(3) = Q_{F3} = 0,0122 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Pe baza valorilor debitelor Q_{F1} , Q_{F2} și Q_{F3} [m^3/s], cu ajutorul relației (3.29) se pot calcula valorile înălțimilor de pompare asigurate de pompe în punctele de funcționare energetică F_1 , F_2 și F_3 :

$$H_{F1} = H_1(Q_{F1}) = 45 + 34Q_{F1} - 31336Q_{F1}^2 = 45 + 34 \cdot 0,0123 - 31336 \cdot 0,0123^2 = 40,68 \text{ m};$$

$$H_{F2} = H_2(Q_{F2}) = 45 + 34Q_{F2} - 31336Q_{F2}^2 = 45 + 34 \cdot 0,0112 - 31336 \cdot 0,0112^2 = 41,45 \text{ m};$$

$$H_{F3} = H_3(Q_{F3}) = 45 + 34Q_{F3} - 31336Q_{F3}^2 = 45 + 34 \cdot 0,0122 - 31336 \cdot 0,0122^2 = 40,75 \text{ m};$$

iar cu ajutorul relației (3.30), se pot calcula valorile randamentelor realizate de pompe în punctele de funcționare energetică F_1 , F_2 și F_3 :

$$\eta_{F1} = \eta_1(Q_{F1}) = 8000 Q_{F1} - 250000 Q_{F1}^2 = 8000 \cdot 0,0123 - 250000 \cdot 0,0123^2 = 60,58\%;$$

$$\eta_{F2} = \eta_2(Q_{F2}) = 8000 Q_{F2} - 250000 Q_{F2}^2 = 8000 \cdot 0,0112 - 250000 \cdot 0,0112^2 = 58,24\%;$$

$$\eta_{F3} = \eta_3(Q_{F3}) = 8000 Q_{F3} - 250000 Q_{F3}^2 = 8000 \cdot 0,0122 - 250000 \cdot 0,0122^2 = 60,39\%;$$

adică $\eta_{F1} \cong 0,606$; $\eta_{F2} \cong 0,582$ și $\eta_{F3} \cong 0,604$.

② Din ecuația continuității (3.32), se obține debitul Q_F vehiculat pe conductele magistrale ale instalației de către cele trei pompe cuplate în paralel, acest debit corespunzând punctului de funcționare energetică F al cuplajului în paralel:

$$Q_F = Q_{F1} + Q_{F2} + Q_{F3} = 0,0123 + 0,0112 + 0,0122 = 0,0357 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Din caracteristica instalației (3.37), se poate calcula înălțimea de pompare H_F aferentă punctului de funcționare energetică F al cuplajului în paralel al celor trei pompe:

$$H_F = H_{inst}(Q_F) = 18 + 16000 Q_F^2 = 18 + 16000 \cdot 0,0357^2 = 38,39 \text{ m}.$$

③ Puterea electrică P_{Fj} consumată pentru pompare de către fiecare pompă, unde $j \in \{1; 2; 3\}$, este definită prin relația (1.34):

$$P_{F1} = \frac{\rho g Q_{F1} H_{F1}}{\eta_{F1}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0123 \cdot 40,68}{0,606} = 8259,4 \text{ W};$$

$$P_{F2} = \frac{\rho g Q_{F2} H_{F2}}{\eta_{F2}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0112 \cdot 41,45}{0,582} = 7971,2 \text{ W};$$

$$P_{F3} = \frac{\rho g Q_{F3} H_{F3}}{\eta_{F3}} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 0,0122 \cdot 40,75}{0,604} = 8232,5 \text{ W}.$$

Puterea electrică totală consumată pentru pompare, P , este suma puterilor consumate de cele trei pompe:

$$P = P_{F1} + P_{F2} + P_{F3} = 24463 \text{ W} \cong 24,5 \text{ kW}.$$

4. PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

4.1. Punctul de funcționare energetică al turbopompei

Problema 4.1.1.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică, din figura 4.1. Apa este vehiculată cu turbopompa **P**, care funcționează la turație nominală. Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.1. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

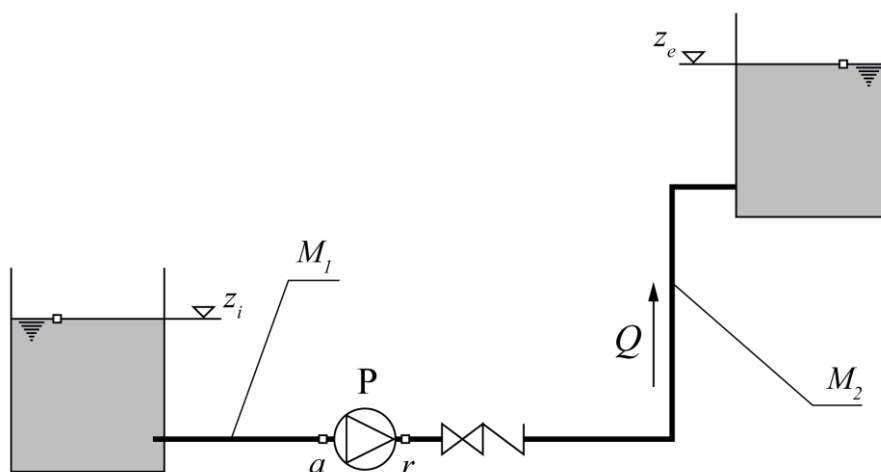


Fig. 4.1. – Instalație hidraulică cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică

Tabel 4.1. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.1

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	110
cota geodezică, z_e [m]	124
presiunea, $p_i = p_e$ [bar, scară manometrică]	0
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s ² /m ⁵]	15000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s ² /m ⁵]	25000

Curba caracteristică energetică $H = H(Q)$ a turbopompei și curba caracteristică de randament $\eta = \eta(Q)$ se dau **sub formă grafică** în figura 4.2, pentru o plajă de variație a debitului Q în litri pe secundă, unde $Q \in [0; 24]$ l/s.

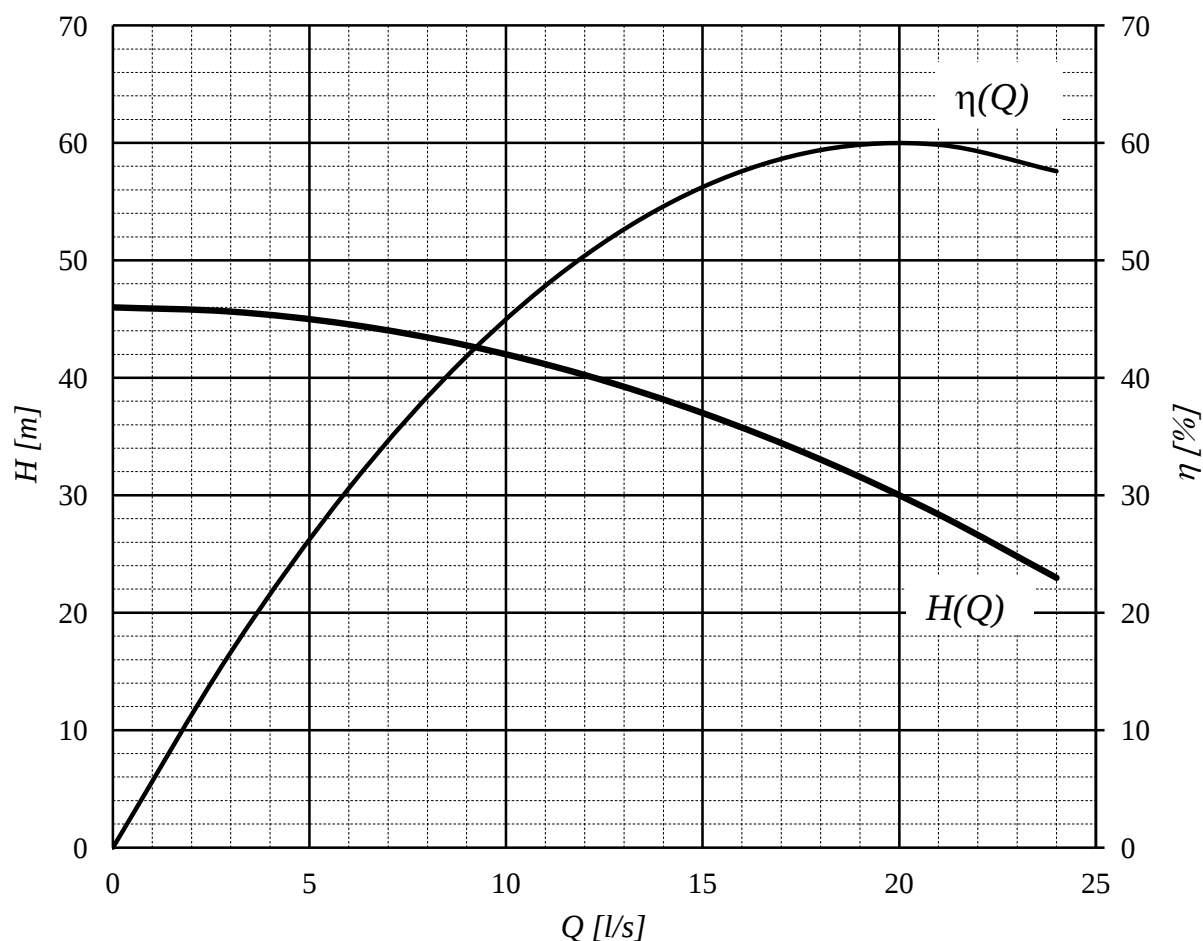


Fig. 4.2. – Curbele caracteristice $H = H(Q)$ și $\eta = \eta(Q)$ ale turbopompei **P** din figura 4.1

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F , înălțimii de pompare H_F și randamentului η_F în punctul de funcționare energetică **F** (Q_F, H_F) al pompei;
- ② Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în punctul **F**.

Indicații pentru rezolvare: Calculele se vor efectua cu unități de măsură din S.I. Pentru rezolvare, se recomandă raportarea la Problema 2.1.2, soluționată în capitolul 2.

Problema 4.1.2.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație deschis la presiunea atmosferică și rezervor de refulare sub presiune, din figura 4.3. Apa este vehiculată cu turbopompa **P**, care funcționează la turație nominală. Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.2. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

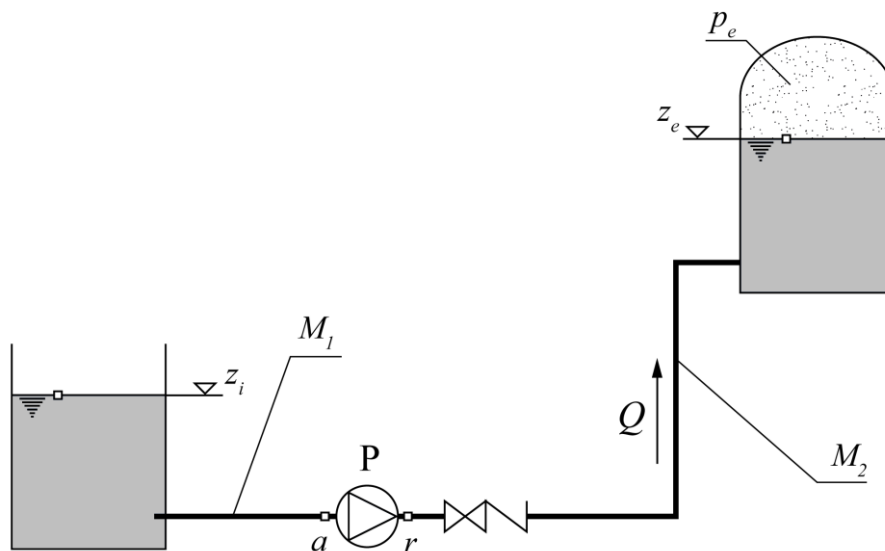


Fig. 4.3. – Instalație hidraulică cu rezervor de refulare sub presiune

Tabel 4.2. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.3

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	6
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	1,6
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s^2/m^5]	6000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s^2/m^5]	14000

Curba caracteristică energetică $H = H(Q)$ a turbopompei și curba caracteristică de randament $\eta = \eta(Q)$ se dau **sub formă grafică** în figura 4.4, pentru o plajă de variație a debitului Q în litri pe secundă, unde $Q \in [0; 24] \text{ l/s}$.

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F , înălțimii de pompare H_F și randamentului η_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al pompei;
- ② Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în punctul F.

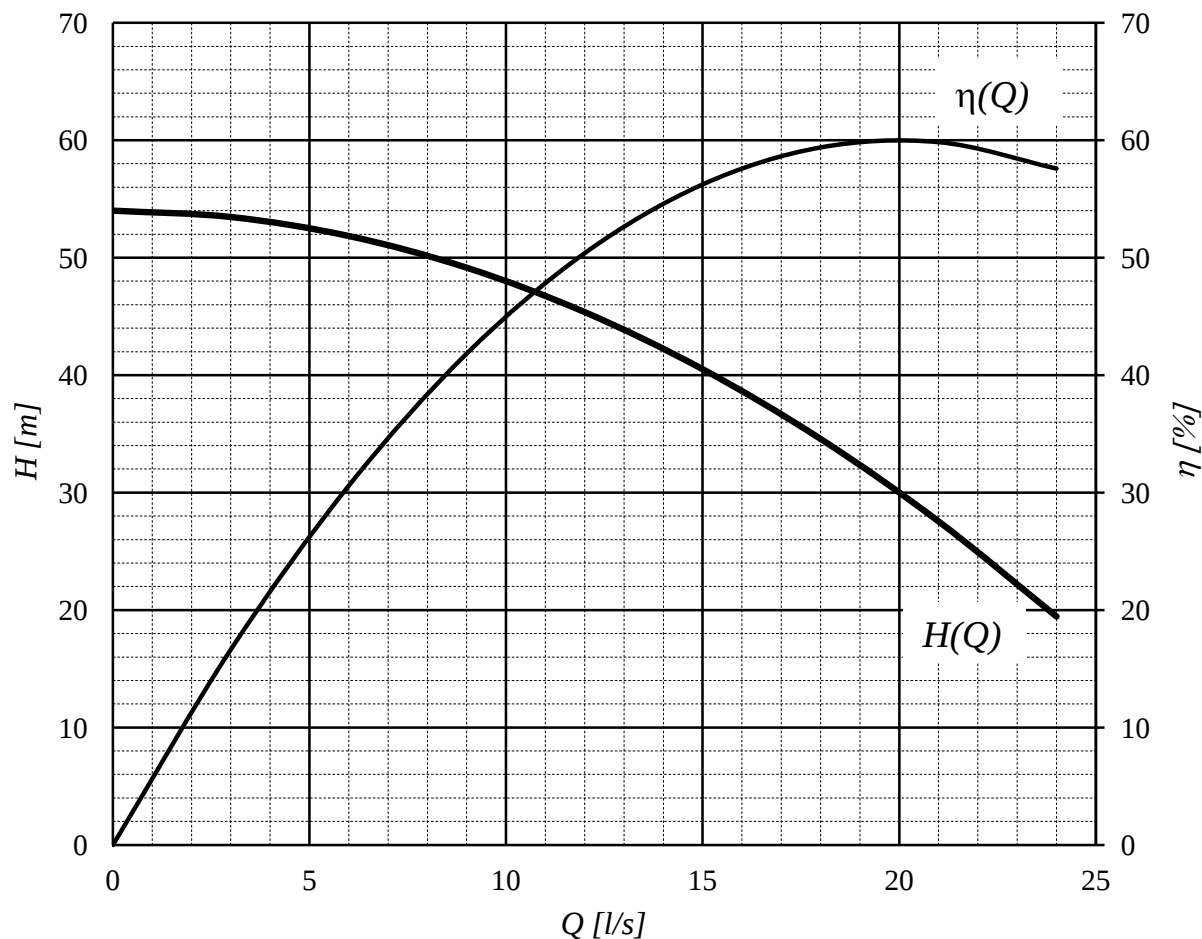


Fig. 4.4. – Curbele caracteristice $H = H(Q)$ și $\eta = \eta(Q)$ ale turbopompei **P** din figura 4.3

Problema 4.1.3.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație sub presiune și rezervor de refulare deschis la presiunea atmosferică, din figura 4.5. Turbopompa **P** funcționează la turație nominală. Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice din tabelul 4.3. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

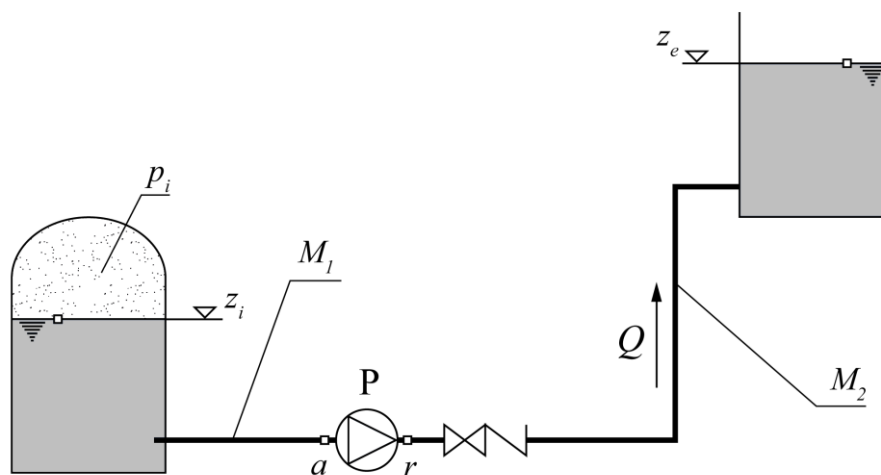


Fig. 4.5. – Instalație hidraulică cu rezervor de aspirație sub presiune

Tabel 4.3. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.5

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	25
cota geodezică, z_e [m]	51
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0,8
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	0
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s ² /m ⁵]	8000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s ² /m ⁵]	22000

Curba caracteristică energetică $H = H(Q)$ a turbopompei și curba caracteristică de randament $\eta = \eta(Q)$ se dau **sub formă grafică** în figura 4.6, pentru o plajă de variație a debitului Q în litri pe secundă, unde $Q \in [0; 24]$ l/s.

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F , înălțimii de pompare H_F și randamentului η_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al pompei;
- ② Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în punctul F.

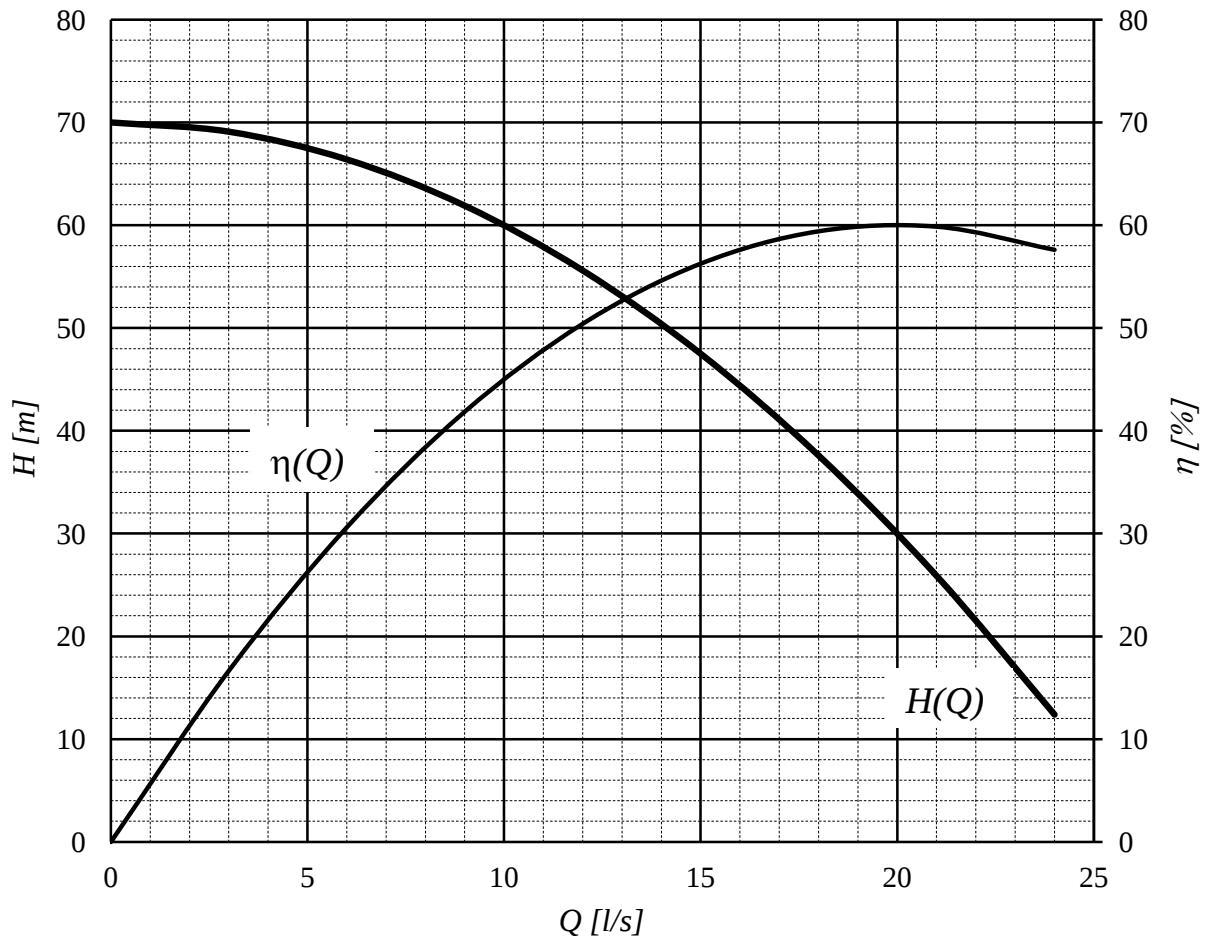


Fig. 4.6. – Curbele caracteristice $H = H(Q)$ și $\eta = \eta(Q)$ ale turbopompei P din figura 4.5

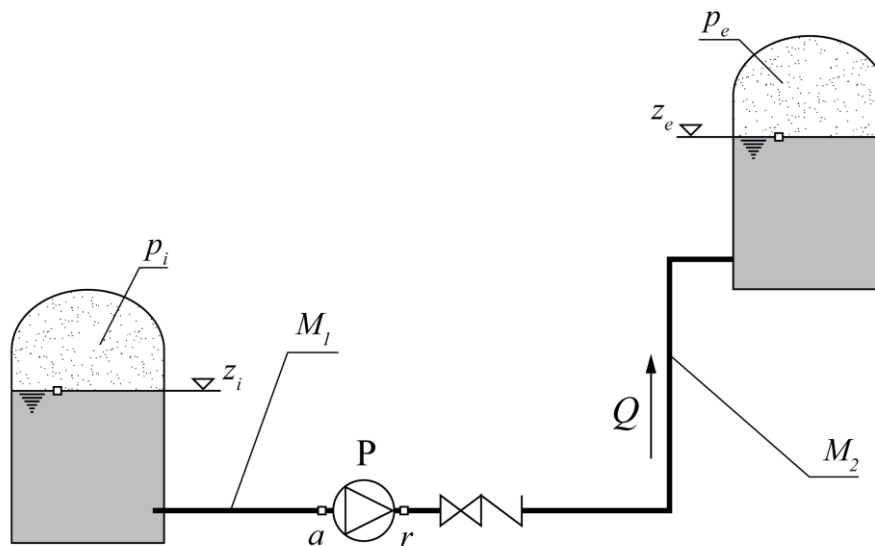


Fig. 4.7. – Instalație hidraulică cu rezervoare sub presiune

Problema 4.1.4.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare de aspirație și de refulare sub presiune, din figura 4.7, caracterizată de elementele geometrice și hidraulice din tabelul 4.4.

Tabel 4.4. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.7

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	10
cota geodezică, z_e [m]	15
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	1,5
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	2
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s ² /m ⁵]	15000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s ² /m ⁵]	35000

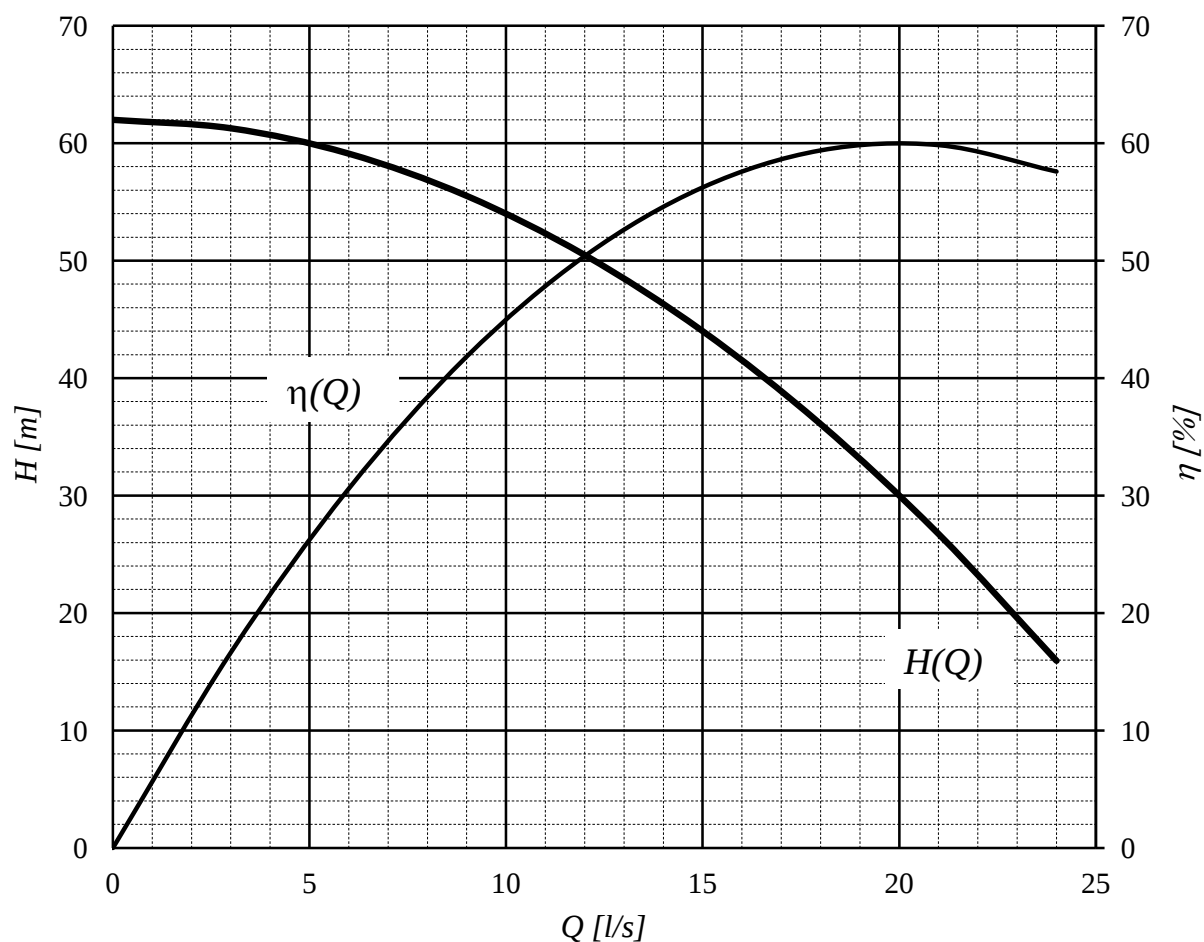


Fig. 4.8. – Curbele caracteristice $H = H(Q)$ și $\eta = \eta(Q)$ ale turbopompei **P** din figura 4.7

Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Curba caracteristică energetică $H = H(Q)$ a turbopompei și curba caracteristică de randament $\eta = \eta(Q)$ se dau **sub formă grafică** în figura 4.8, pentru o plajă de variație a debitului Q în litri pe secundă, unde $Q \in [0; 24] \text{ l/s}$.

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F , înălțimii de pompare H_F și randamentului η_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al pompei;
- ② Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în punctul F.

Problema 4.1.5.

O pompă centrifugă aspiră apă dintr-un rezervor deschis, cu nivel constant aflat la cota $z_i = 0$ m și o transportă într-un alt rezervor deschis, cu nivelul aflat la cota $z_e = 14$ m, ca în figura 4.9.

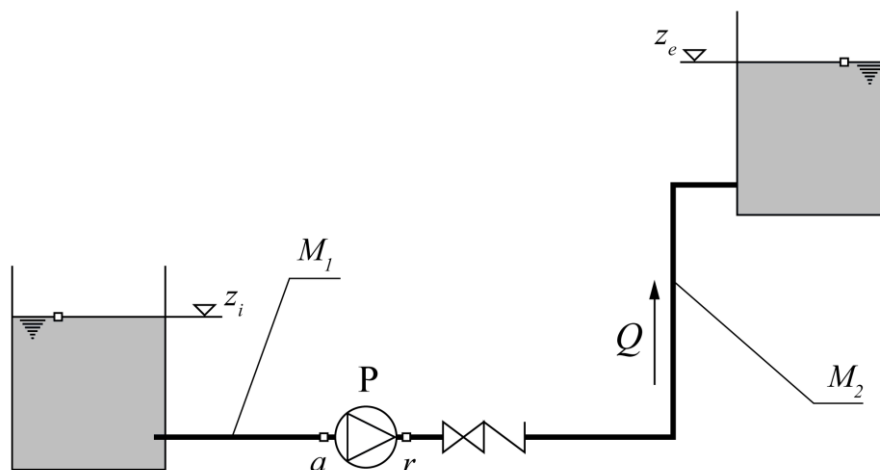


Fig. 4.9. – Instalație hidraulică cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică

Caracteristica energetică $H = H(Q)$ a pompei **P** și caracteristica de randament $\eta = \eta(Q)$ se dau **sub formă tabelară** (vezi tabelul 4.5), pe perechi de valori $\{Q, H\}$, respectiv $\{Q, \eta\}$, pentru câteva valori discrete ale debitului, cuprinse în intervalul $Q \in [0; 86,4] \text{ m}^3/\text{h}$.

Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Cunoscând valorile modulelor de rezistență hidraulică ale conductei de aspirație $M_1 = 10000 \text{ s}^2/\text{m}^5$, respectiv conductei de refulare $M_2 = 30000 \text{ s}^2/\text{m}^5$, să se determine valorile debitului Q_F

ce tranzitează sistemul hidraulic din figura 4.9, înălțimii de pompare H_F și randamentului η_F corespunzătoare punctul de funcționare energetică **F** al pompei, apoi să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în punctul **F**.

Tabel 4.5. – Perechile de valori $\{Q, H\}$ și $\{Q, \eta\}$ ale curbelor caracteristice ale pompei

Q [m ³ /h]	0	10,8	21,6	32,4	43,2	54	64,8	75,6	86,4
H [m]	50	49,6	48,2	46,0	42,8	38,8	33,8	28,0	21,2
η [%]	0	17	31	42	50	56	59	60	58

Problema 4.1.6.

Instalația de pompare din figura 4.10 este caracterizată de următoarele elemente geometrice și hidraulice:

- cotele geodezice $z_i = 0$ m și $z_e = 20$ m;
- presiunile $p_i = 0$ bar și $p_e = 0,6$ bar (ambele în scară manometrică);
- modulele de rezistență hidraulică ale conductei de aspirație $M_1 = 2000 \text{ s}^2/\text{m}^5$, respectiv conductei de refulare $M_2 = 8000 \text{ s}^2/\text{m}^5$.

Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

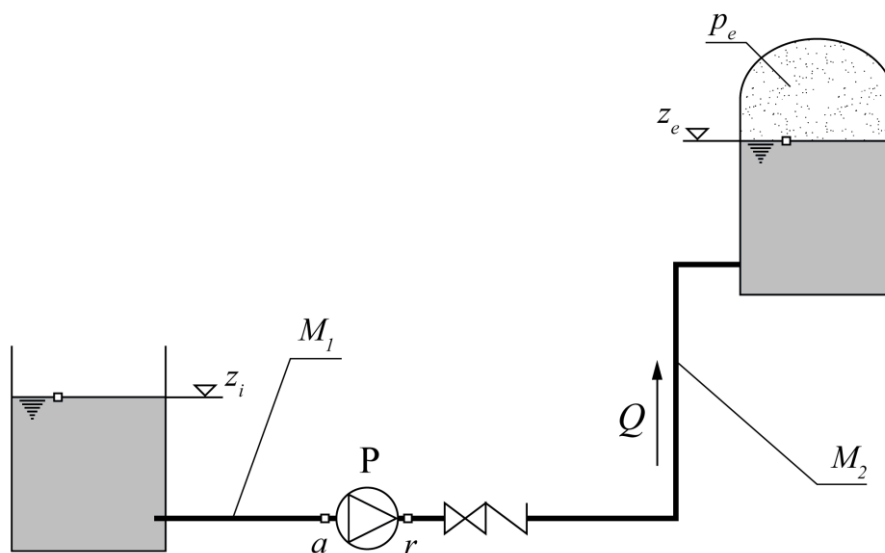


Fig. 4.10. – Instalație hidraulică cu rezervor de refulare sub presiune

Caracteristica energetică $H = H(Q)$ a turbopompei **P** și caracteristica de randament $\eta = \eta(Q)$ se dau **prin puncte** în tabelul 4.6, pe perechi de valori $\{Q, H\}$, respectiv $\{Q, \eta\}$, pentru câteva valori discrete ale debitului, cuprinse în intervalul $Q \in [0; 24]$ l/s.

Tabel 4.6. – Perechile de valori $\{Q, H\}$ și $\{Q, \eta\}$ ale curbelor caracteristice ale pompei

Q [l/s]	0	3	6	9	12	15	18	21	24
H [m]	34	33,9	33,6	33,2	32,6	31,8	30,8	29,6	28,2
η [%]	0	17	31	42	50	56	59	60	58

Să se determine valorile debitului Q_F , înălțimii de pompare H_F și randamentului η_F în punctul de funcționare energetică **F** (Q_F, H_F) al pompei. Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în punctul **F**.

Problema 4.1.7.

Pentru pomparea apei în sistemul hidraulic din figura 4.11, se utilizează turbopompa **P** ale cărei curbe caracteristice, anume: caracteristica energetică $H = H(Q)$ și caracteristica de randament $\eta = \eta(Q)$, se vor trasa pe baza datelor din tabelul 4.7. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

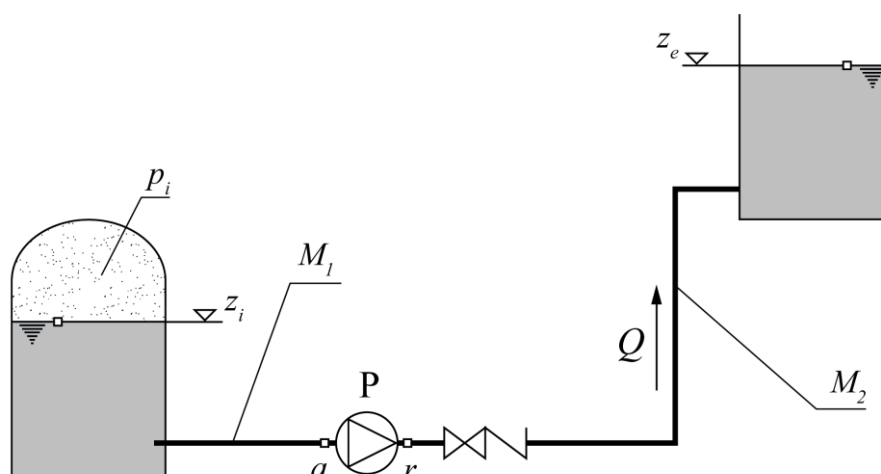


Fig. 4.11. – Instalație hidraulică cu rezervor de aspirație sub presiune

Tabel 4.7. – Perechile de valori $\{Q, H\}$ și $\{Q, \eta\}$ ale curbelor caracteristice ale pompei

Q [l/s]	0	3	6	9	12	15	18	21	24
H [m]	58	57,4	55,5	52,3	47,9	42,3	35,3	27,1	17,7
η [%]	0	17	31	42	50	56	59	60	58

Fiind cunoscute cotele geodezice $z_i = 25\text{ m}$ și $z_e = 59\text{ m}$, presiunile $p_i = 1,2\text{ bar}$ și $p_e = 0\text{ bar}$ (ambele în scară manometrică), respectiv modulele de rezistență hidraulică ale conductei de aspirație $M_1 = 6000\text{ s}^2/\text{m}^5$ și conductei de refulare $M_2 = 14000\text{ s}^2/\text{m}^5$, să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare.

Problema 4.1.8.

În figura 4.12 este prezentată schematizat o instalație hidraulică ce transportă apă, prin pompare, între două rezervoare sub presiune situate la cote diferite.

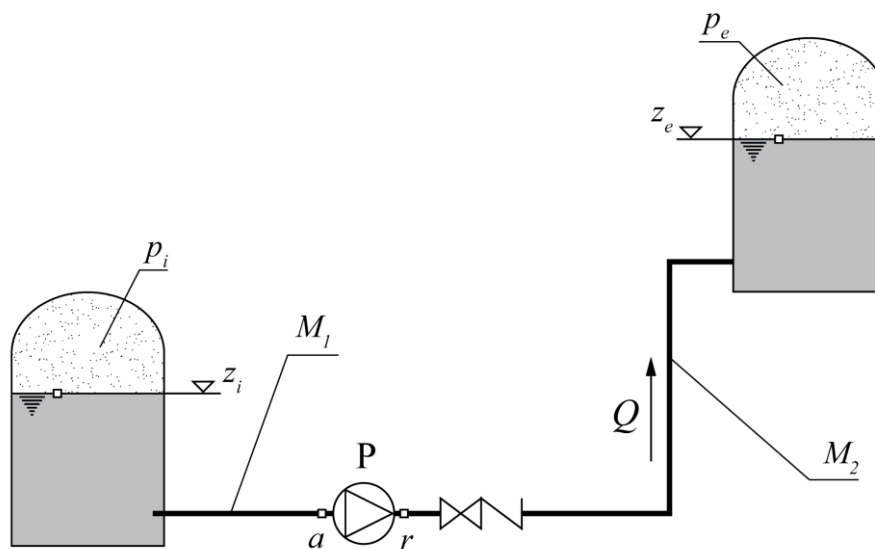


Fig. 4.12. – Instalație hidraulică cu rezervoare sub presiune

Se cunosc următoarele elemente geometrice și hidraulice ale instalației din figura 4.12:

- cotele geodezice $z_i = 15\text{ m}$ și $z_e = 25\text{ m}$;
- presiunile $p_i = 0,5\text{ bar}$ și $p_e = 1,3\text{ bar}$ (ambele în scară manometrică);
- modulele de rezistență hidraulică ale conductei de aspirație $M_1 = 11000\text{ s}^2/\text{m}^5$, respectiv conductei de refulare $M_2 = 19000\text{ s}^2/\text{m}^5$.

Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Caracteristica energetică $H = H(Q)$ a pompei **P** și caracteristica de randament $\eta = \eta(Q)$ se dau **sub formă tabelară** (vezi tabelul 4.8), pe perechi de valori $\{Q, H\}$, respectiv $\{Q, \eta\}$, pentru câteva valori discrete ale debitului, cuprinse în intervalul $Q \in [0; 86,4] \text{ m}^3/\text{h}$.

Să se determine valoarea randamentului și puterea agregatului de pompare, atunci când acesta funcționează în condițiile prezentate.

Tabel 4.8. – Perechile de valori $\{Q, H\}$ și $\{Q, \eta\}$ ale curbelor caracteristice ale pompei

$Q \text{ [m}^3/\text{h]}$	0	10,8	21,6	32,4	43,2	54	64,8	75,6	86,4
$H \text{ [m]}$	66	65,2	62,8	58,7	53	45,8	36,8	26,3	14,2
$\eta \text{ [%]}$	0	17	31	42	50	56	59	60	58

4.2. Punctul de funcționare cavitațională al turbopompei

Problema 4.2.1.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare deschise în atmosferă, din figura 4.13.

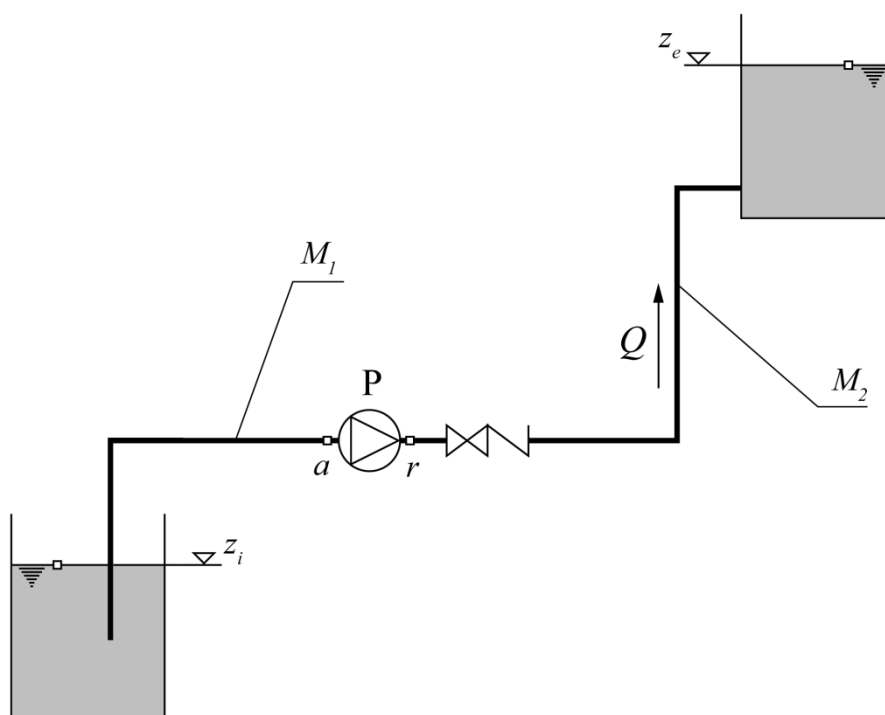


Fig. 4.13. – Instalație hidraulică cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.9.

Tabel 4.9. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.13

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	24
cota punctului a (centrul secțiunii de aspirație a pompei), z_a [m]	5
presiunea, $p_i = p_e$ [bar, scară manometrică]	0
presiunea de vaporizare a apei la 20°C, p_v [Pa, scară absolută]	2338
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s ² /m ⁵]	5000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s ² /m ⁵]	10000

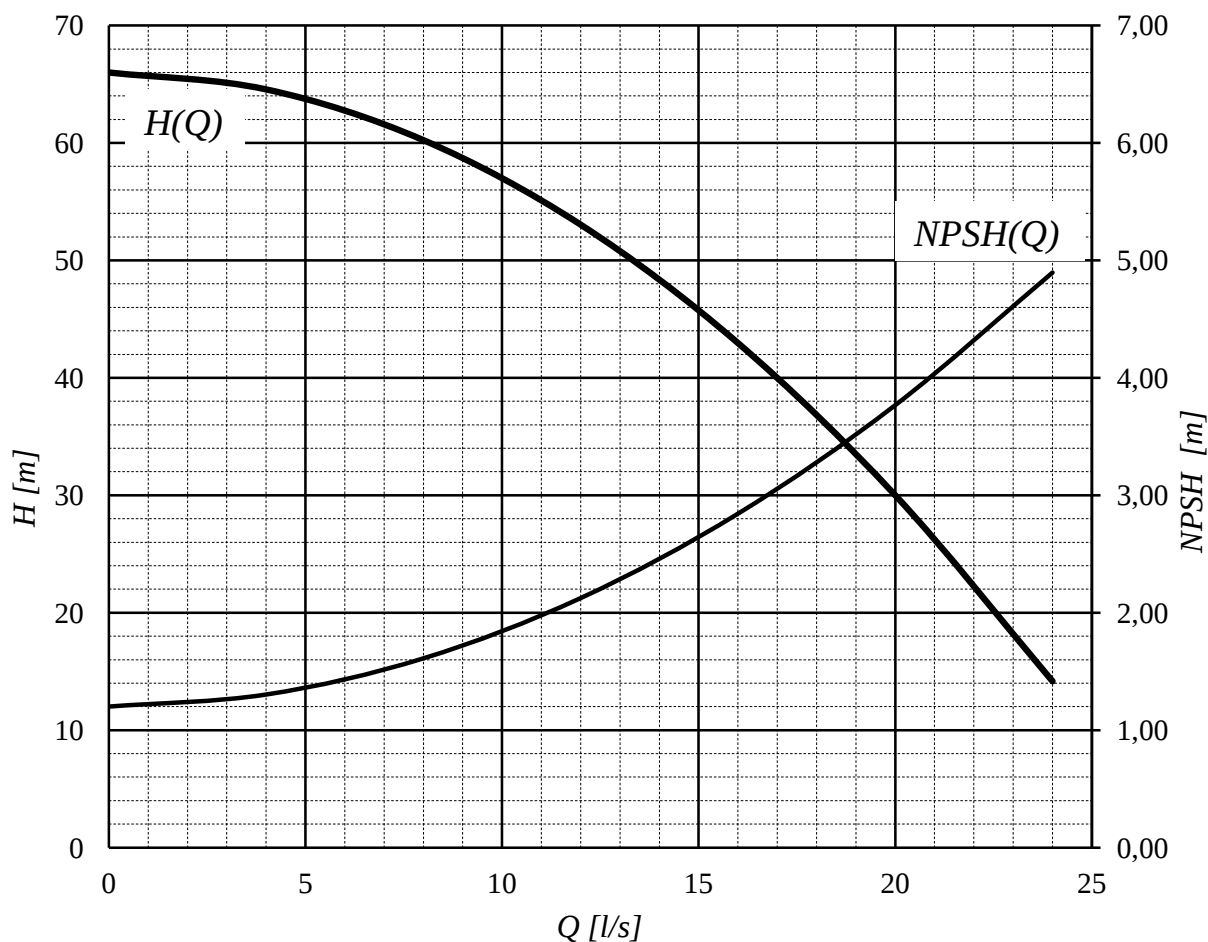


Fig. 4.14. – Curbele caracteristice $H = H(Q)$ și $NPSH = NPSH(Q)$ ale turbopompei **P** din figura 4.13

Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$. Turbopompa **P** funcționează la turație nominală. Curba caracteristică energetică $H = H(Q)$ și curba caracteristică de cavitație a pompei $NPSH = NPSH(Q)$ se dau **sub formă grafică** în figura 4.14, pentru $Q \in [0; 24] \text{ l/s}$.

Se cere:

- ① Pe baza valorilor obținute pentru NPSH cerut de pompă în punctul de funcționare energetică **F**, respectiv pentru NPSH disponibil în instalație în **F**, să se menționeze dacă pompa funcționează fără cavitație la aspirație, sau în regim de cavitație;
- ② Pentru cazul în care pompa funcționează cu cavitație la aspirație, să se determine valoarea maximă z_{amax} a cotei centrului secțiunii de aspirație a pompei, pentru care pompa funcționează fără cavitație.

Indicații pentru rezolvare: Calculele se vor efectua cu unități de măsură din S.I. Pentru rezolvare, se recomandă raportarea la Problema 2.2.2, soluționată în capitolul 2.

Problema 4.2.2.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație deschis la presiunea atmosferică și rezervor de refulare sub presiune, din figura 4.15. Turbopompa **P** funcționează la turație nominală. Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.10.

Tabel 4.10. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.15

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	10
cota punctului <i>a</i> (centrul secțiunii de aspirație a pompei), z_a [m]	5
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	1,6
presiunea de vaporizare a apei la 20°C, p_v [Pa, scară absolută]	2338
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s ² /m ⁵]	3000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s ² /m ⁵]	7000

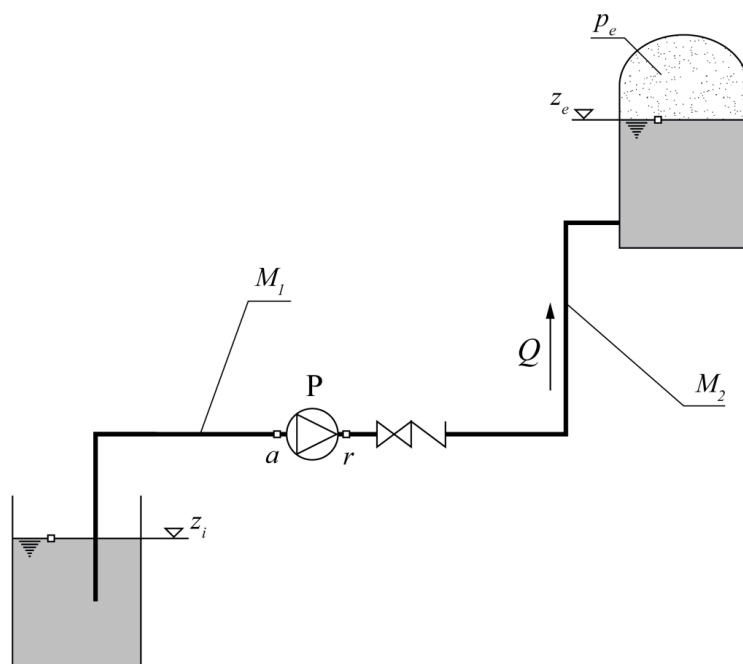


Fig. 4.15. – Instalație hidraulică cu rezervor de refulare sub presiune

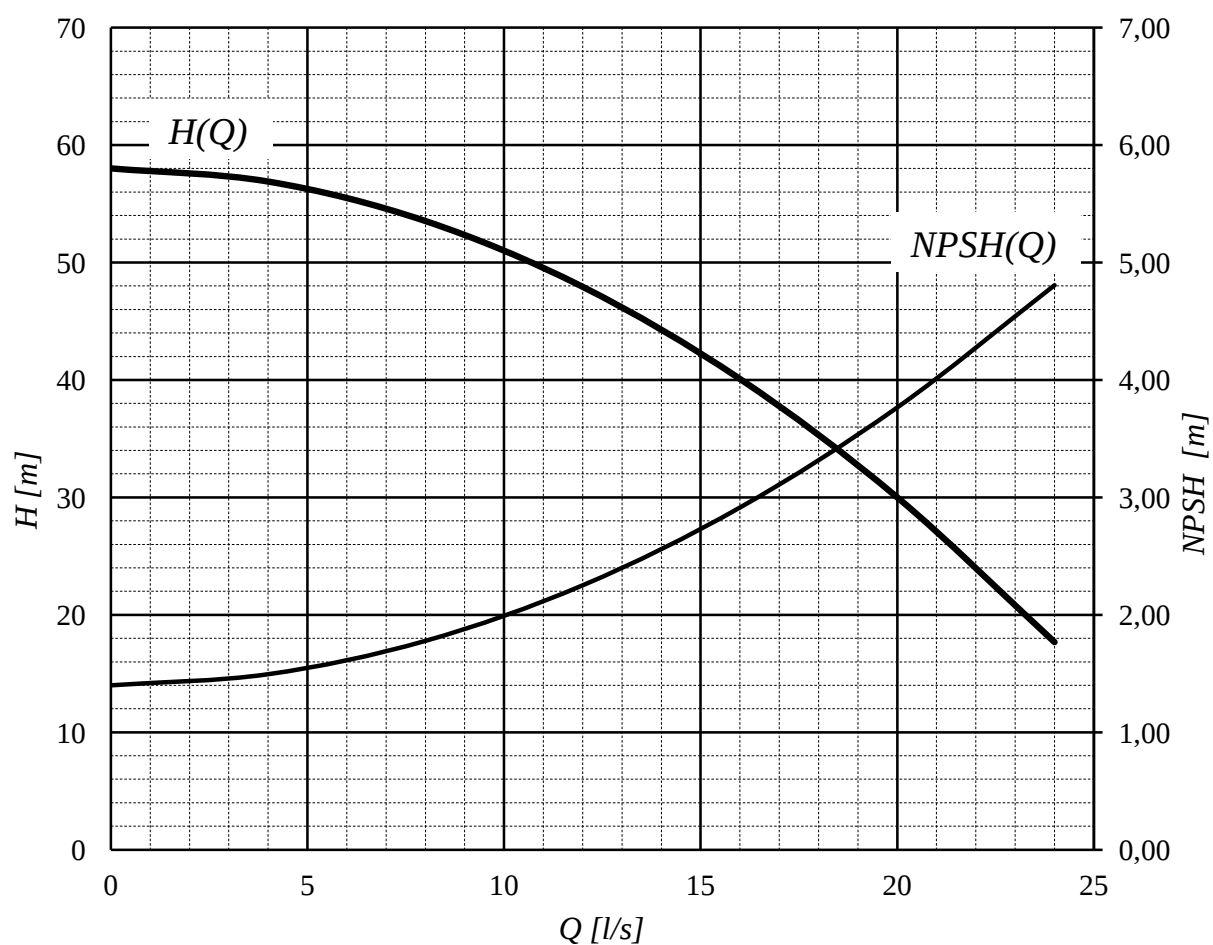


Fig. 4.16. – Curbele caracteristice $H = H(Q)$ și $NPSH = NPSH(Q)$ ale pompei din fig. 4.15

Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$. Curba caracteristică energetică $H = H(Q)$ și curba caracteristică de cavitație a pompei $NPSH = NPSH(Q)$ se dau **sub formă grafică** în figura 4.16, pentru $Q \in [0; 24] \text{ l/s}$.

Să se stabilească cota geodezică maximă z_{amax} la care poate fi amplasată pompa fără ca aceasta să caviteze.

Problema 4.2.3.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică, din figura 4.17. Turbopompa **P** funcționează la turație nominală. Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.11. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

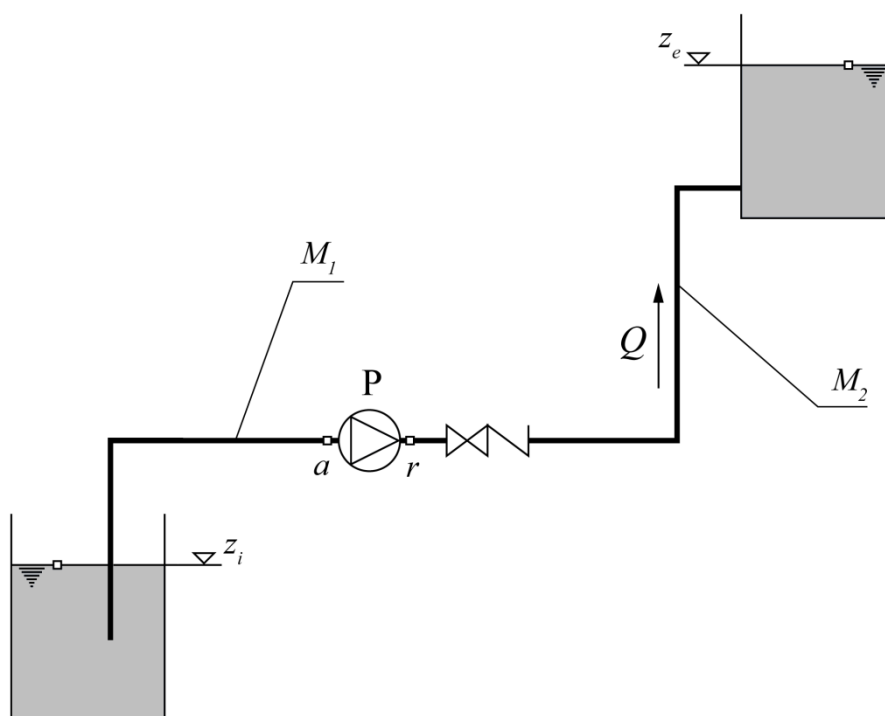


Fig. 4.17. – Instalație hidraulică cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică

Tabel 4.11. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.17

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	22

cota punctului a (centrul secțiunii de aspirație a pompei), z_a [m]	5
presiunea, $p_i = p_e$ [bar, scară manometrică]	0
presiunea de vaporizare a apei la 20°C, p_v [Pa, scară absolută]	2338
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s ² /m ⁵]	5000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s ² /m ⁵]	15000

Curba caracteristică energetică $H = H(Q)$ și curba caracteristică de cavitație a pompei $NPSH = NPSH(Q)$ se dau **sub formă grafică** în figura 4.18, pentru $Q \in [0; 24]$ l/s.

Să se stabilească cota geodezică maximă z_{amax} la care poate fi amplasată pompa fără ca aceasta să caviteze.

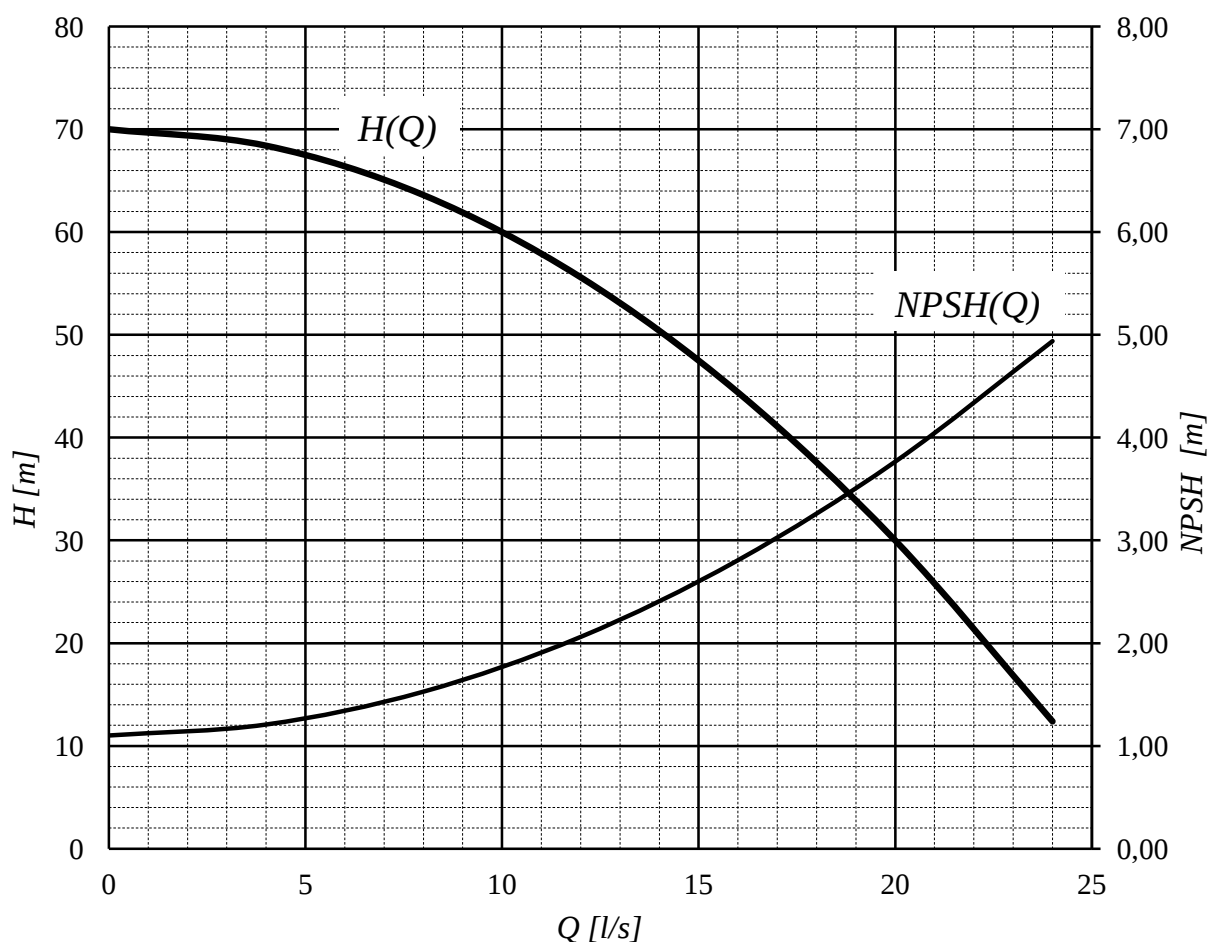


Fig. 4.18. – Curbele caracteristice $H = H(Q)$ și $NPSH = NPSH(Q)$ ale turbopompei P din figura 4.17

Problema 4.2.4.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație deschis în atmosferă și rezervor de refulare sub presiune, din figura 4.19. Turbopompa **P** funcționează la turație nominală. Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.12. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

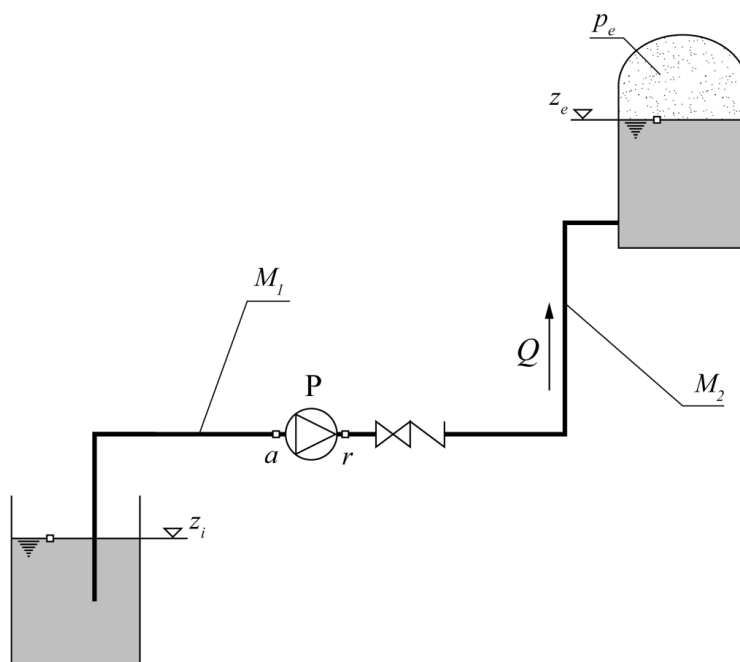


Fig. 4.19. – Instalație hidraulică cu rezervor de refulare sub presiune

Tabel 4.12. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.19

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	4
cota punctului a (centrul secțiunii de aspirație a pompei), z_a [m]	5
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	0,6
presiunea de vaporizare a apei la 20°C, p_v [Pa, scară absolută]	2338
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s^2/m^5]	15000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s^2/m^5]	35000

Curba caracteristică energetică $H = H(Q)$ și curba caracteristică de cavitație a pompei $NPSH = NPSH(Q)$ se dau sub formă grafică în figura 4.20, pentru $Q \in [0; 24]$ l/s.

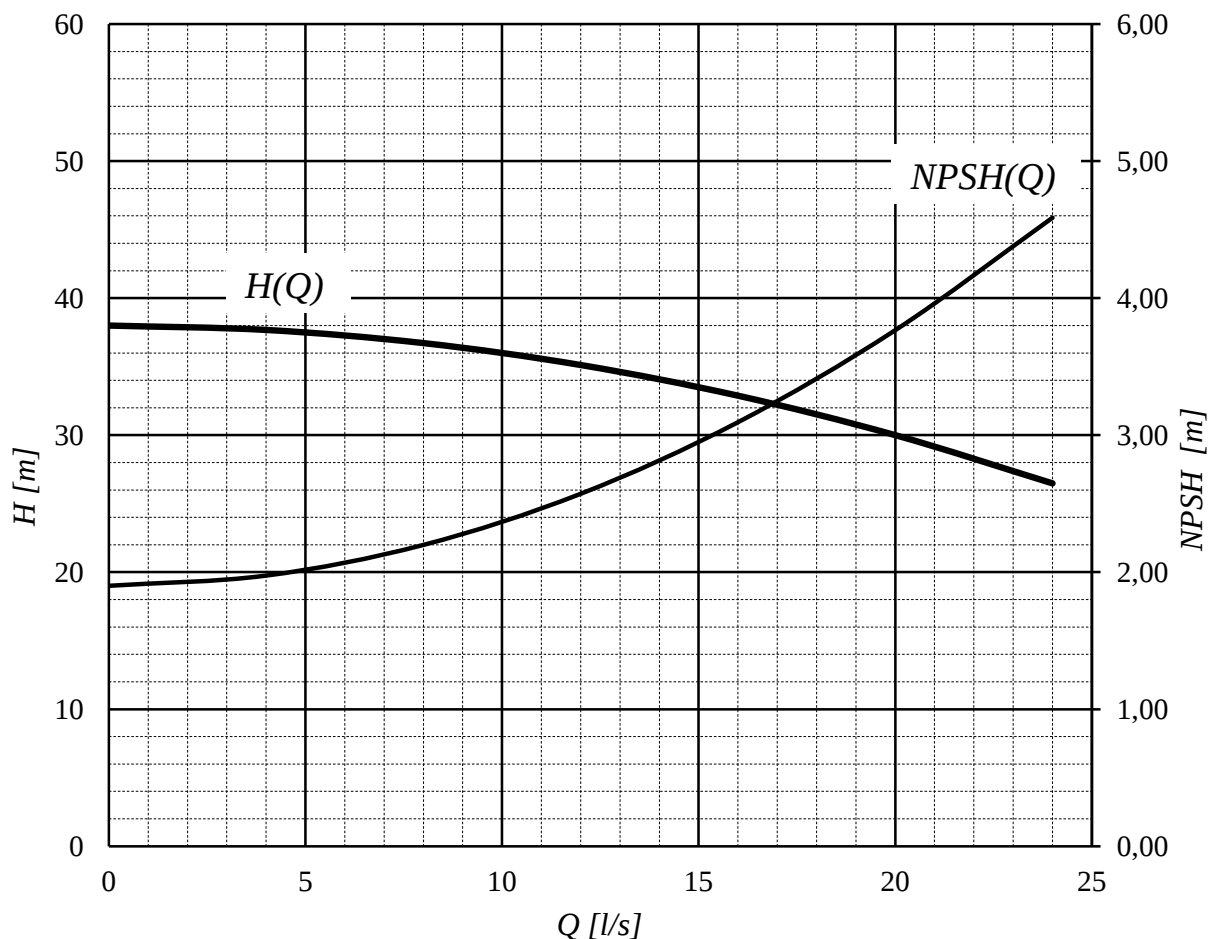


Fig. 4.20. – Curbele caracteristice $H = H(Q)$ și $NPSH = NPSH(Q)$ ale turbopompei **P** din figura 4.19

Să se stabilească dacă pompa **P** funcționează fără cavitație, sau în regim cavitațional. În cazul în care apare cavitația la aspirația pompei, să se determine valoarea maximă z_{amax} a cotei centrului secțiunii de aspirație a pompei, la care trebuie să fie amplasată pompa, astfel încât aceasta să funcționeze fără cavitație.

Problema 4.2.5.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică, din figura 4.21. Turbopompa **P** funcționează la turație nominală. Instalația este caracterizată de

elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.13. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

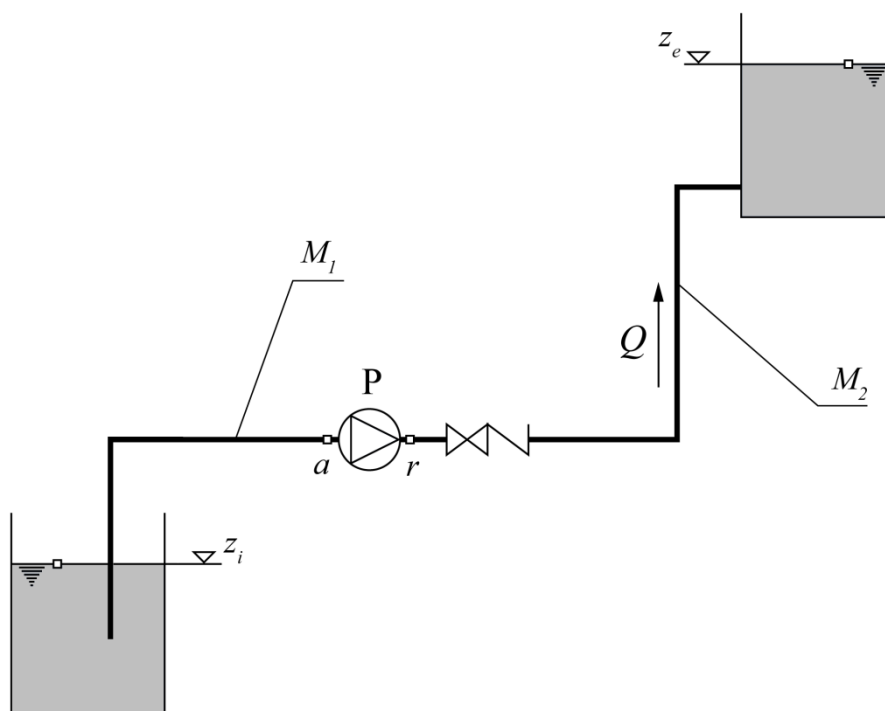


Fig. 4.21. – Instalație hidraulică cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică

Tabel 4.13. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.21

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	14
cota punctului a (centrul secțiunii de aspirație a pompei), z_a [m]	5
presiunea, $p_i = p_e$ [bar, scară manometrică]	0
presiunea de vaporizare a apei la 20°C , p_v [Pa, scară absolută]	2338
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s^2/m^5]	5000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s^2/m^5]	35000

Caracteristica energetică $H = H(Q)$, caracteristica de randament $\eta = \eta(Q)$ și caracteristica de cavitație a pompei $NPSH = NPSH(Q)$ se dau **sub formă tabelară** (vezi tabelul 4.14), pe

perechi de valori $\{Q, H\}$, $\{Q, \eta\}$, respectiv $\{Q, NPSH\}$, pentru câteva valori discrete ale debitului, cuprinse în intervalul $Q \in [0; 24]$ l/s.

Tabel 4.14. – Perechile de valori $\{Q, H\}$, $\{Q, \eta\}$ și $\{Q, NPSH\}$ aferente curbelor caracteristice ale pompei

Q [l/s]	0	4	8	12	16	20	24
H [m]	46	45,4	43,4	40,2	35,8	30	23
η [%]	0	22	38	50	58	60	58
$NPSH$ [m]	1,7	1,78	2,03	2,44	3,02	3,77	4,68

Se cere:

- ① Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare;
- ② Pe baza valorilor obținute pentru NPSH cerut de pompă în punctul de funcționare energetică **F**, respectiv pentru NPSH disponibil în instalație în **F**, să se menționeze dacă pompa funcționează fără cavitație la aspirație, sau în regim de cavitație;
- ③ Pentru cazul în care pompa funcționează cu cavitație la aspirație, să se determine valoarea maximă z_{amax} a cotei centrului secțiunii de aspirație a pompei, pentru care pompa funcționează fără cavitație.

Indicații pentru rezolvare: Calculele se vor efectua cu unități de măsură din S.I. Pentru rezolvare, se recomandă raportarea la Problema 2.2.2, soluționată în capitolul 2.

Problema 4.2.6.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație deschis la presiunea atmosferică și rezervor de refulare sub presiune, din figura 4.22. Turbopompa **P** funcționează la turație nominală. Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.15. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Caracteristica energetică $H = H(Q)$ și caracteristica de cavitație a pompei $NPSH = NPSH(Q)$ se dau **sub formă tabelară** (vezi tabelul 4.16), pe perechi de valori $\{Q, H\}$, respectiv $\{Q, NPSH\}$, pentru câteva valori discrete ale debitului, cuprinse în intervalul $Q \in [0; 24]$ l/s.

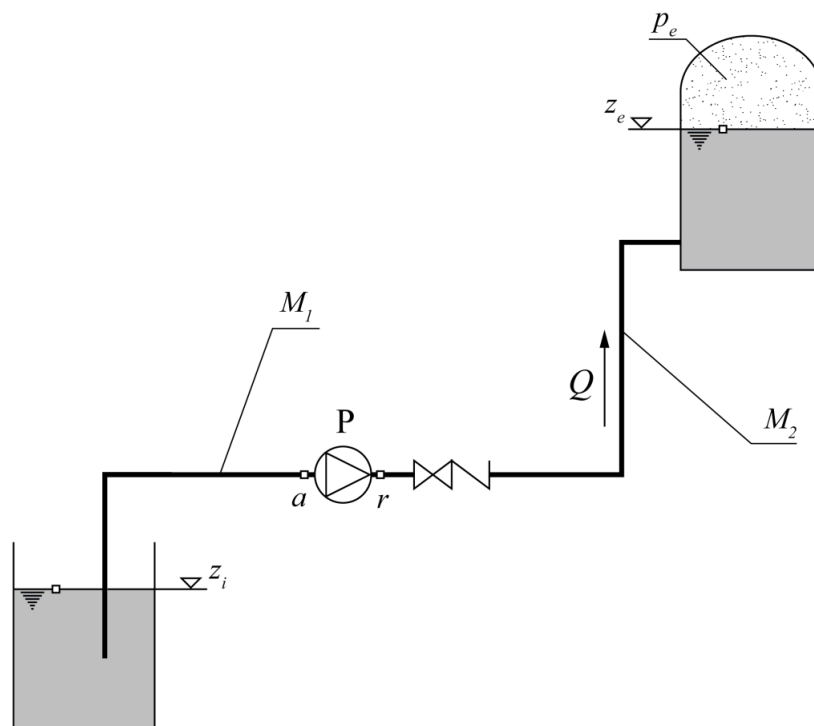


Fig. 4.22. – Instalație hidraulică cu rezervor de refulare sub presiune

Tabel 4.15. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.22

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	8
cota punctului a (centrul secțiunii de aspirație a pompei), z_a [m]	5
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	1
presiunea de vaporizare a apei la 20°C, p_v [Pa, scară absolută]	2338
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s ² /m ⁵]	5000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s ² /m ⁵]	25000

Tabel 4.16. – Perechile de valori $\{Q, H\}$ și $\{Q, NPSH\}$ ale curbelor caracteristice

Q [l/s]	0	4	8	12	16	20	24
H [m]	34	33,8	33,4	32,6	31,4	30	28,2
$NPSH$ [m]	2	2,07	2,28	2,64	3,13	3,77	4,54

Se cere:

- ① Pe baza valorilor obținute pentru NPSH cerut de pompă în punctul de funcționare energetică **F**, respectiv pentru NPSH disponibil în instalație în **F**, să se menționeze dacă pompa funcționează fără cavitație la aspirație, sau în regim de cavitație;
- ② Pentru cazul în care pompa funcționează cu cavitație la aspirație, să se determine valoarea maximă z_{amax} a cotei centrului secțiunii de aspirație a pompei, pentru care pompa funcționează fără cavitație.

Problema 4.2.7.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică, din figura 4.23. Pompa **P** funcționează la turație nominală.

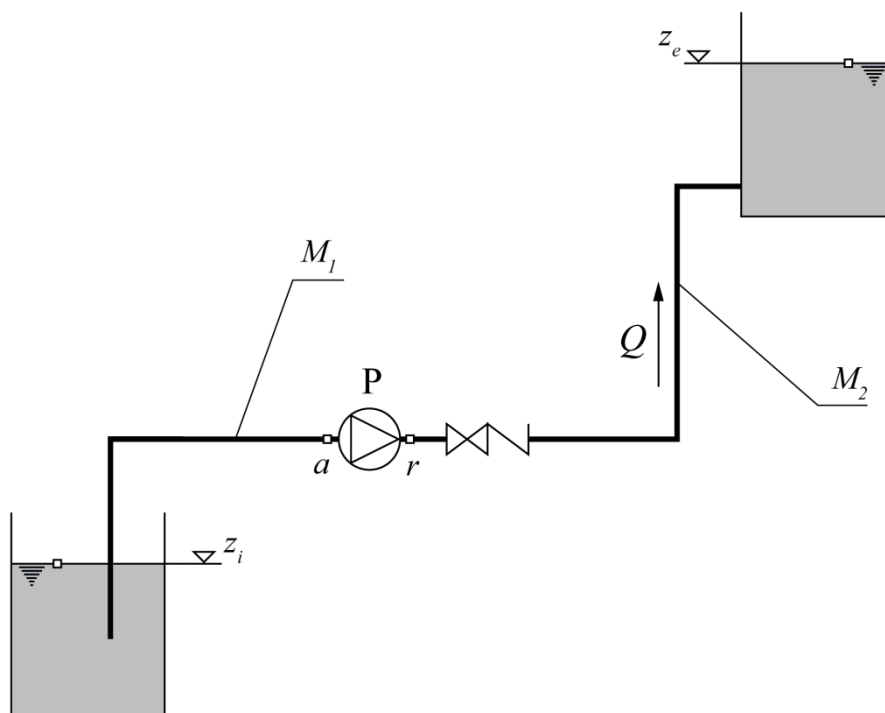


Fig. 4.23. – Instalație hidraulică cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.17. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Caracteristica energetică $H = H(Q)$ și caracteristica de cavitație a pompei $NPSH = NPSH(Q)$ se dau **sub formă tabelară** (vezi tabelul 4.18), pe perechi de valori $\{Q, H\}$, respectiv $\{Q, NPSH\}$, pentru câteva valori discrete ale debitului, cuprinse în intervalul $Q \in [0; 24] \text{ l/s}$.

Tabel 4.17. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.23

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	26
cota punctului a (centrul secțiunii de aspirație a pompei), z_a [m]	5
presiunea, $p_i = p_e$ [bar, scară manometrică]	0
presiunea de vaporizare a apei la 20°C, p_v [Pa, scară absolută]	2338
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s ² /m ⁵]	5000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s ² /m ⁵]	5000

Tabel 4.18. – Perechile de valori $\{Q, H\}$ și $\{Q, NPSH\}$ ale curbelor caracteristice

Q [l/s]	0	4	8	12	16	20	24
H [m]	54	53	50,2	45,4	38,6	30	19,4
$NPSH$ [m]	1,5	1,59	1,86	2,32	2,95	3,77	4,76

Să se determine cota geodezică maximă z_{amax} la care poate fi amplasată pompa fără ca aceasta să caviteze.

Problema 4.2.8.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație deschis la presiunea atmosferică și rezervor de refulare sub presiune, din figura 4.24. Turbopompa **P** funcționează la turație nominală.

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.19.

Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Caracteristica energetică $H = H(Q)$ și caracteristica de cavitație a pompei $NPSH = NPSH(Q)$ se dau **sub formă tabelară** (vezi tabelul 4.20), pe perechi de valori $\{Q, H\}$, respectiv $\{Q, NPSH\}$, pentru câteva valori discrete ale debitului, cuprinse în intervalul $Q \in [0; 24] \text{ l/s}$.

Să se determine cota geodezică maximă z_{amax} la care poate fi amplasată pompa fără ca aceasta să caviteze.

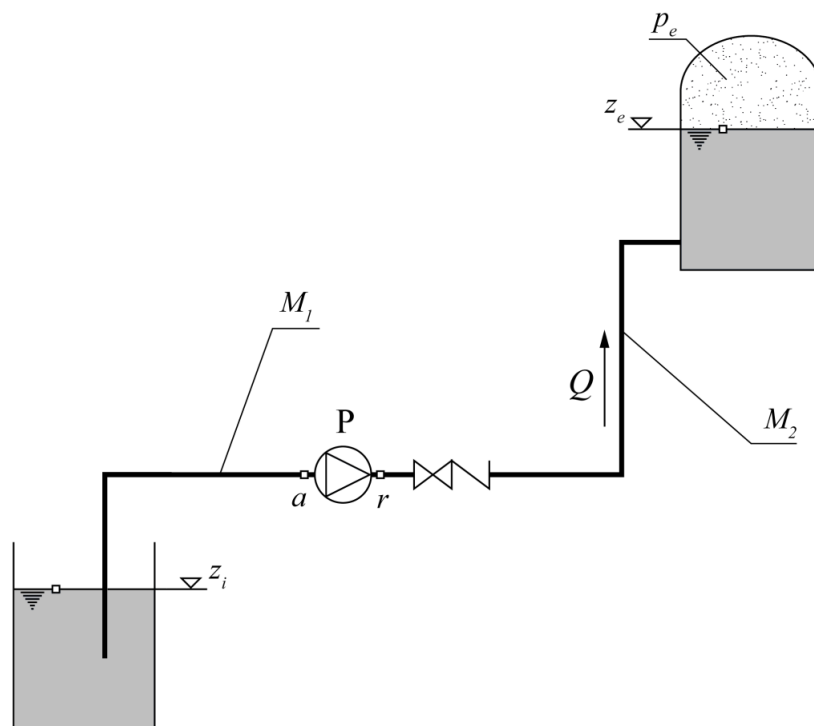


Fig. 4.24. – Instalație hidraulică cu rezervor de refulare sub presiune

Tabel 4.19. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.24

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	4
cota punctului a (centrul secțiunii de aspirație a pompei), z_a [m]	5
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	1,8
presiunea de vaporizare a apei la 20°C, p_v [Pa, scară absolută]	2338
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s ² /m ⁵]	5000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s ² /m ⁵]	15000

Tabel 4.20. – Perechile de valori $\{Q, H\}$ și $\{Q, NPSH\}$ ale curbelor caracteristice

Q [l/s]	0	4	8	12	16	20	24
H [m]	62	60,7	56,9	50,5	41,5	30	15,9
$NPSH$ [m]	1,3	1,4	1,69	2,19	2,88	3,77	4,85

4.3. Funcționarea unei turbopompe cu turație variabilă

Problema 4.3.1.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică, din figura 4.25. Turbopompa **P** este antrenată de un motor cu turație variabilă și funcționează la o turație n , mai mică decât turația nominală n_0 , anume: $n = 0,5n_0$.

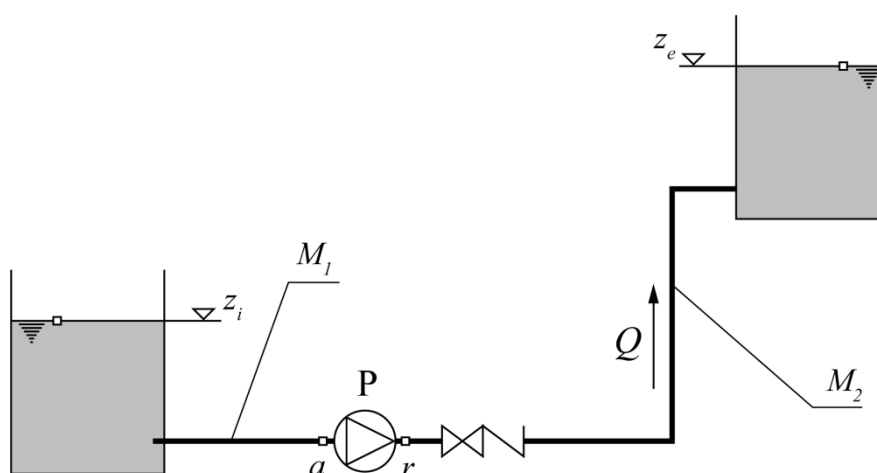


Fig. 4.25. – Instalație hidraulică cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.21. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Tabel 4.21. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.25

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	2
cota geodezică, z_e [m]	12
presiunea, $p_i = p_e$ [bar, scară manometrică]	0
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s^2/m^5]	30000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s^2/m^5]	70000

Caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ a pompei la turația nominală n_0 , respectiv caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ se dau **sub formă grafică** în figura 4.26, pentru $Q \in [0; 30]$ l/s.

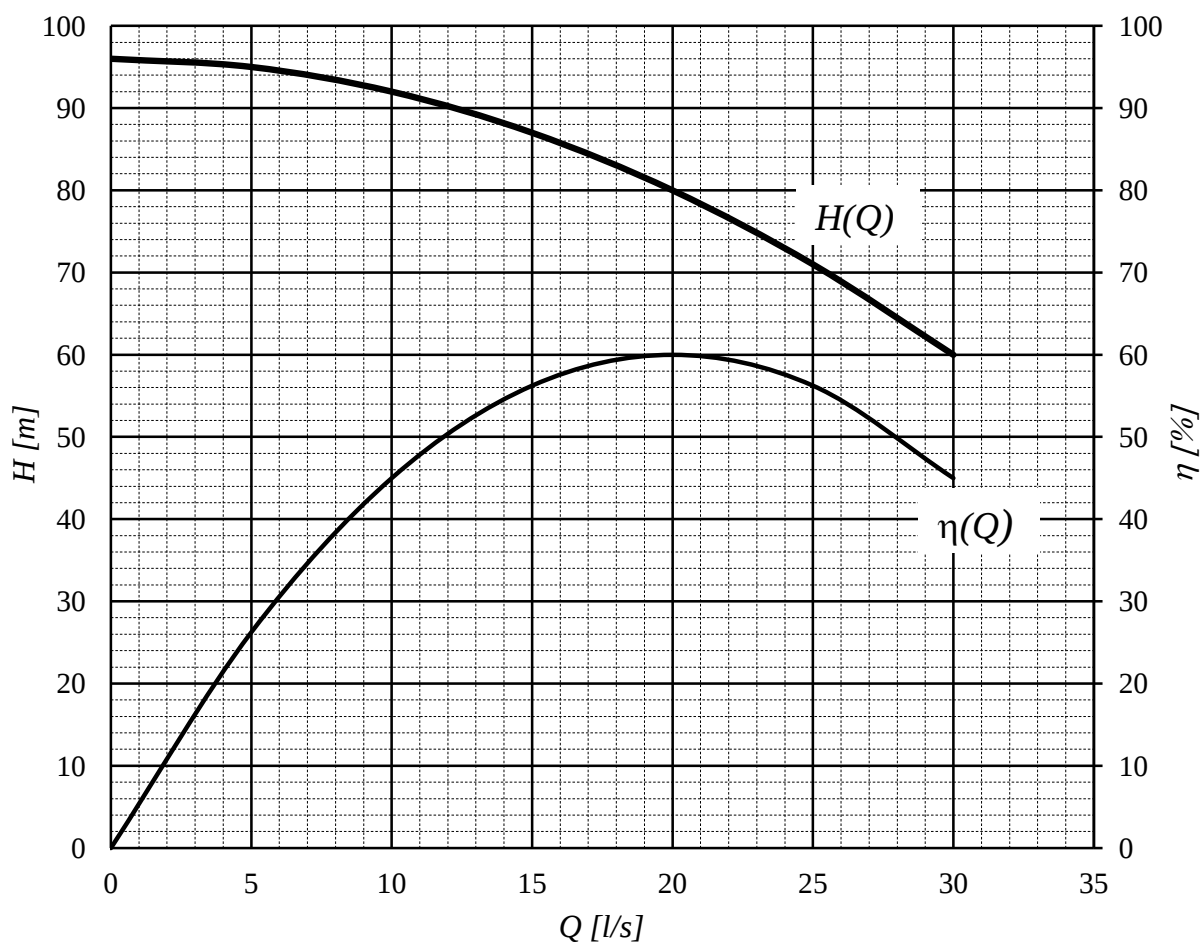


Fig. 4.26. – Curbele caracteristice $H_0 = H_0(Q_0)$ și $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ ale pompei **P** din figura 4.25, la turația nominală n_0

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F , înălțimii de pompare H_F și randamentului η_F în punctul de funcționare energetică **F** (Q_F, H_F) al pompei, la turația $n = 0,5n_0$;
- ② Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în punctul **F**.

Indicații pentru rezolvare: Calculele se vor efectua cu unități de măsură din S.I. Pentru rezolvare, se recomandă raportarea la Problema 2.3.1, soluționată în capitolul 2.

Problema 4.3.2.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație deschis la presiunea atmosferică și rezervor de refulare sub presiune, din figura 4.27. Turbopompa **P** este antrenată de un motor cu turație variabilă și funcționează la o turație n oarecare.

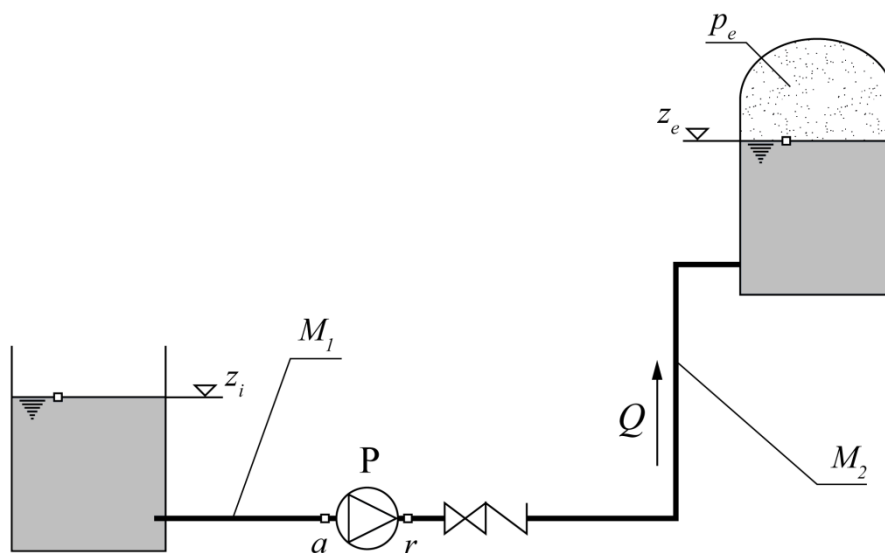


Fig. 4.27. – Instalație hidraulică cu rezervor de refulare sub presiune

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.22. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Tabel 4.22. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.27

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	6
cota geodezică, z_e [m]	10
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	0,8
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s^2/m^5]	20000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s^2/m^5]	60000

Caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ a pompei la turația nominală n_0 , respectiv caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ se dau **sub formă grafică** în figura 4.28, pentru $Q \in [0; 30]$ l/s.

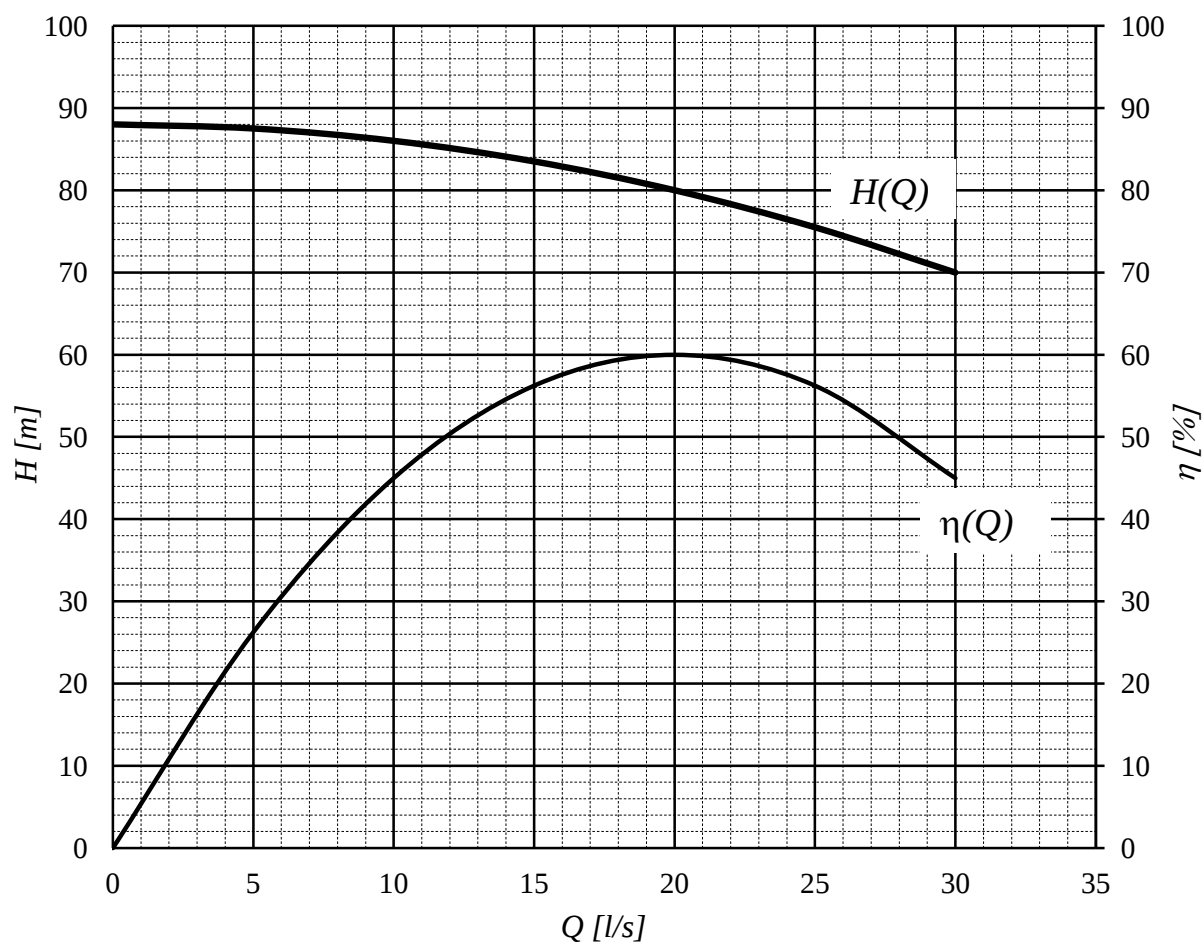


Fig. 4.28. – Curbele caracteristice $H_0 = H_0(Q_0)$ și $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ ale pompei **P** din figura 4.27, la turația nominală n_0

Pompa trebuie să asigure în instalație o valoare impusă a debitului, anume: $Q_F = 10$ l/s, unde **F** reprezintă punctul de funcționare energetică impus. Valoarea Q_F poate fi obținută când pompa este antrenată cu o anumită turație n (necunoscută).

Se cere:

- ① Să se determine valoarea raportului turațiilor n/n_0 , pentru care se asigură în instalație valoarea impusă a debitului, $Q_F = 10$ l/s;
- ② Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare.

Indicații pentru rezolvare: Calculele se vor efectua cu unități de măsură din S.I. Pentru rezolvare, se recomandă raportarea la Problema 2.3.2, soluționată în capitolul 2.

Problema 4.3.3.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație sub presiune și rezervor de refulare deschis la presiunea atmosferică, din figura 4.29. Turbopompa **P** este antrenată de un motor cu turație variabilă și funcționează la o turație n , mai mică decât turația nominală n_0 , anume: $n = 0,5n_0$.

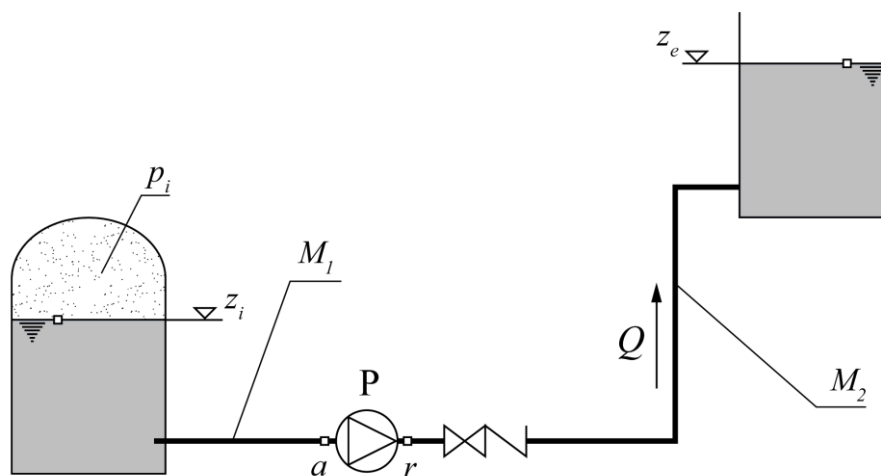


Fig. 4.29. – Instalație hidraulică cu rezervor de aspirație sub presiune

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.23. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Tabel 4.23. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.29

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	20
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0,7
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	0
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s^2/m^5]	20000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s^2/m^5]	50000

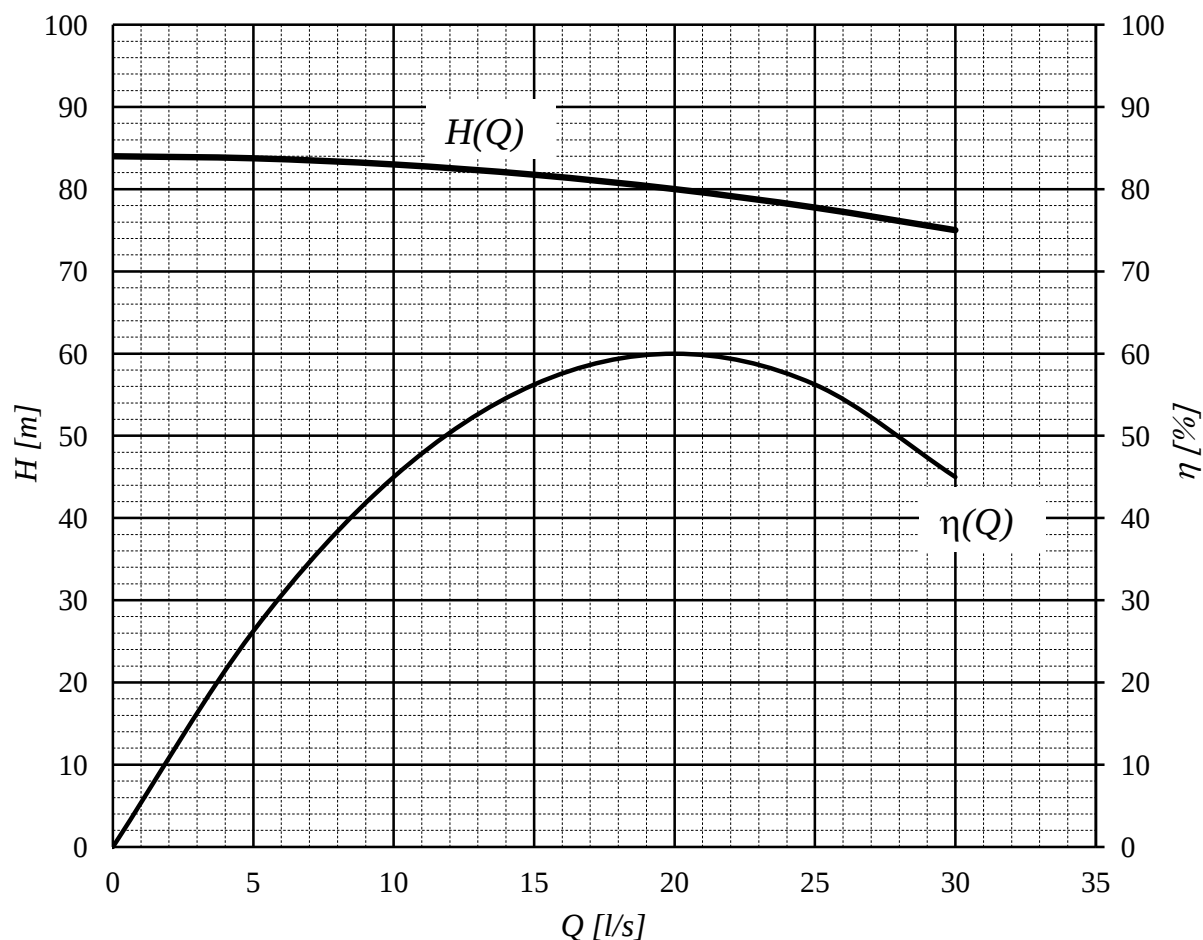


Fig. 4.30. – Curbele caracteristice $H_0 = H_0(Q_0)$ și $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ ale pompei **P** din figura 4.29, la turația nominală n_0

Caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ a pompei la turația nominală n_0 , respectiv caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ se dau **sub formă grafică** în figura 4.30, pentru $Q \in [0; 30]$ l/s.

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F , înălțimii de pompare H_F și randamentului η_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al pompei, la turația $n = 0,5n_0$;
- ② Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în punctul **F**.

Problema 4.3.4.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare de aspirație și de refulare sub presiune, din figura 4.31. Turbopompa **P** este antrenată de un motor cu turație variabilă și funcționează la o turație n oarecare.

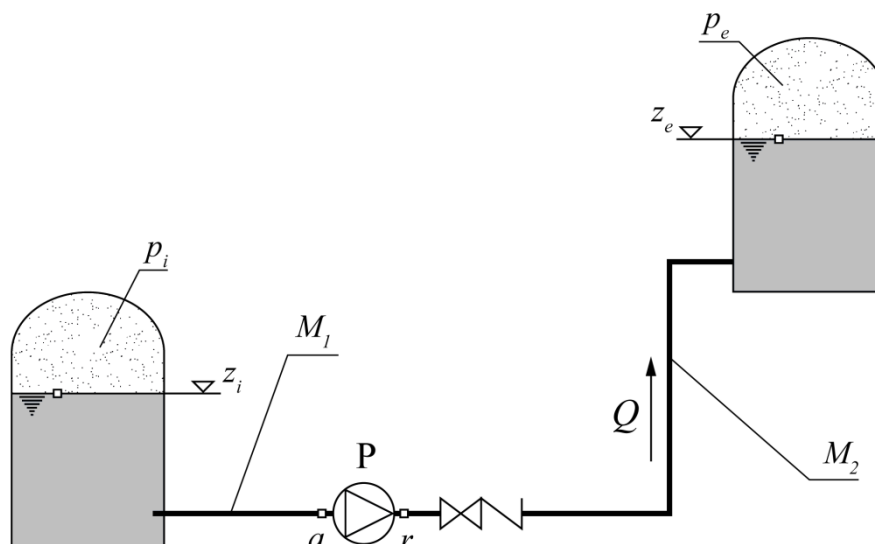


Fig. 4.31. – Instalație hidraulică cu rezervoare sub presiune

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.24. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Tabel 4.24. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.31

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	4
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	1,8
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	2,5
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s^2/m^5]	30000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s^2/m^5]	60000

Caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ a pompei la turația nominală n_0 , respectiv caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ se dau **sub formă grafică** în figura 4.32, pentru $Q \in [0; 30] \text{ l/s}$.

Pompa trebuie să asigure în instalație o valoare impusă a înălțimii de pompare, anume: $H_F = 20 \text{ m}$, unde **F** reprezintă punctul de funcționare energetică impus. Valoarea H_F poate fi obținută când pompa este antrenată cu o anumită turație n (necunoscută).

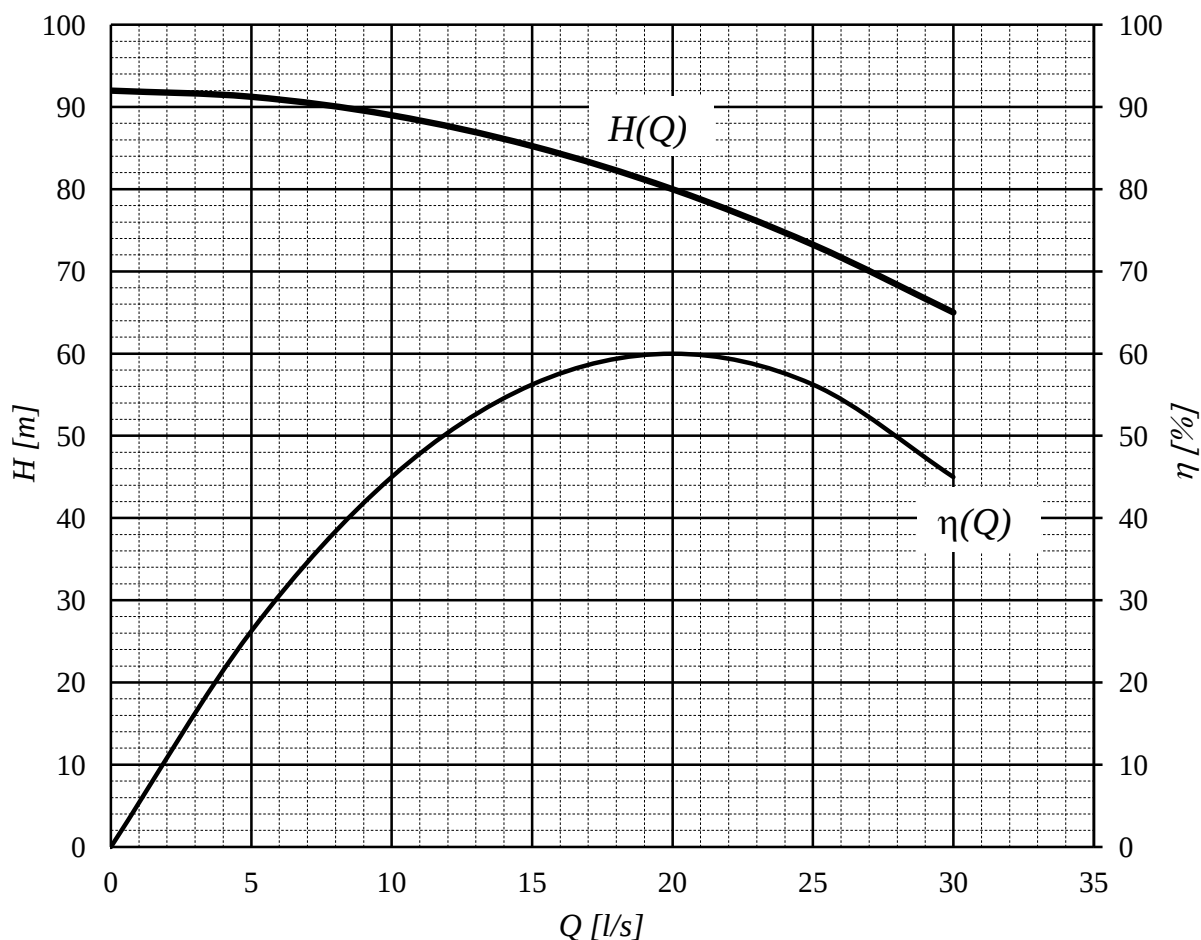


Fig. 4.32. – Curbele caracteristice $H_0 = H_0(Q_0)$ și $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ ale pompei **P** din figura 4.31, la turația nominală n_0

Se cere:

- ① Să se determine valoarea raportului turațiilor n/n_0 , pentru care se asigură în instalație valoarea impusă a înălțimii de pompare, $H_F = 20$ m;
- ② Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare.

Indicații pentru rezolvare: Calculele se vor efectua cu unități de măsură din S.I. Pentru rezolvare, se recomandă raportarea la Problema 2.3.2, soluționată în capitolul 2.

Problema 4.3.5.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică, din figura 4.33. Turbopompa **P** este antrenată de un motor cu turație variabilă și funcționează la o turație n , mai mică decât turația nominală n_0 , anume: $n = 0,5n_0$.

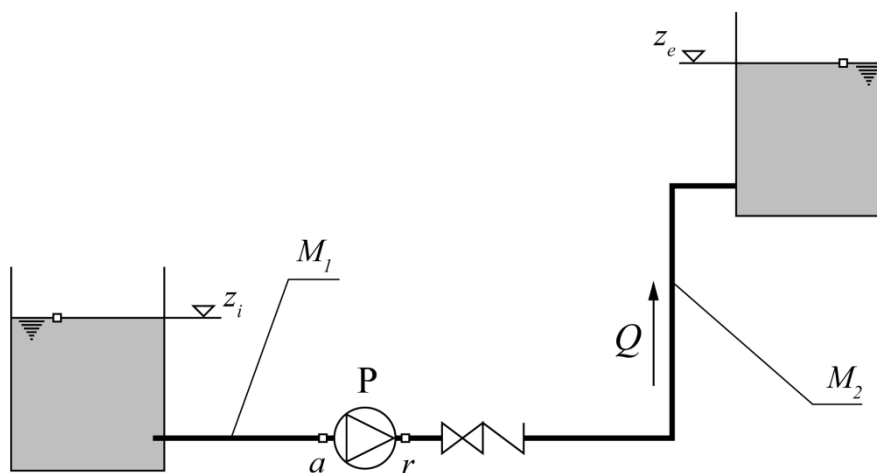


Fig. 4.33. – Instalație hidraulică cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.25. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Tabel 4.25. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.33

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	10
cota geodezică, z_e [m]	14
presiunea, $p_i = p_e$ [bar, scară manometrică]	0
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s^2/m^5]	60000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s^2/m^5]	100000

Tabel 4.26. – Perechile de valori $\{Q_0, H_0\}$ și $\{Q_0, \eta_0\}$ ale curbelor caracteristice ale pompei

Q_0 [l/s]	0	5	10	15	20	25	30
H_0 [m]	120	117,5	110	97,5	80	57,5	30
η_0 [%]	0	26	45	56	60	56	45

Caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ a pompei la turația nominală n_0 , respectiv caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ se dau **sub formă tabelară** (vezi tabelul 4.26), pe

perechi de valori $\{Q_0, H_0\}$ și $\{Q_0, \eta_0\}$, pentru câteva valori discrete ale debitului, cuprinse în intervalul $Q \in [0; 30] \text{ l/s}$.

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F , înălțimii de pompare H_F și randamentului η_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al pompei, la turația $n = 0,5n_0$;
- ② Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în punctul F.

Problema 4.3.6.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație deschis la presiunea atmosferică și rezervor de refulare sub presiune, din figura 4.34. Turbopompa **P** este antrenată de un motor cu turație variabilă și funcționează la o turație n oarecare.

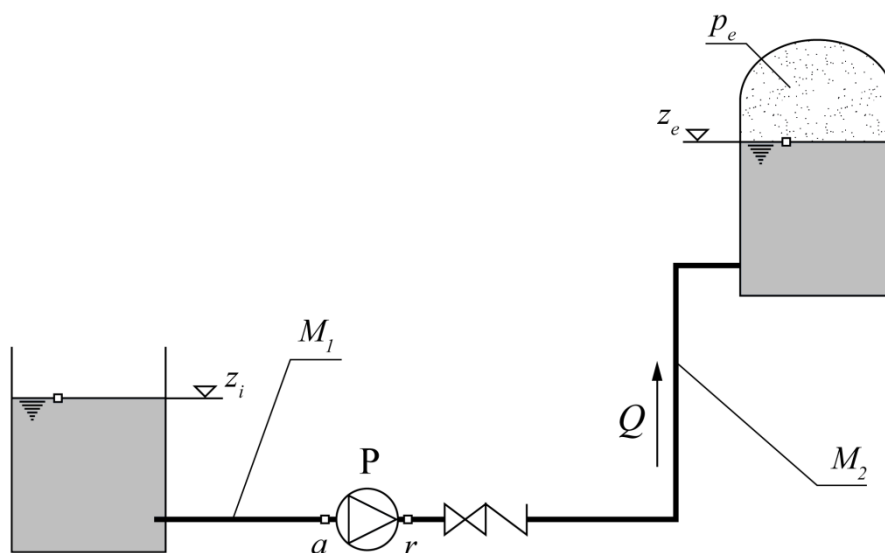


Fig. 4.34. – Instalație hidraulică cu rezervor de refulare sub presiune

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.27. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Tabel 4.27. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.34

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	4
cota geodezică, z_e [m]	8

presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	0,5
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s ² /m ⁵]	40000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s ² /m ⁵]	70000

Caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ a pompei la turația nominală n_0 , respectiv caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ se dau **sub formă tabelară** (vezi tabelul 4.28), pe perechi de valori $\{Q_0, H_0\}$ și $\{Q_0, \eta_0\}$, pentru câteva valori discrete ale debitului, cuprinse în intervalul $Q \in [0; 30]$ l/s.

Tabel 4.28. – Perechile de valori $\{Q_0, H_0\}$ și $\{Q_0, \eta_0\}$ ale curbelor caracteristice ale pompei

Q_0 [l/s]	0	5	10	15	20	25	30
H_0 [m]	100	98,8	95	88,8	80	68,8	55
η_0 [%]	0	26	45	56	60	56	45

Pompa trebuie să asigure în instalație o valoare impusă a debitului, anume: $Q_F = 10$ l/s, unde **F** reprezintă punctul de funcționare energetică impus. Valoarea Q_F poate fi obținută când pompa este antrenată cu o anumită turație n (necunoscută).

Se cere:

- ① Să se determine valoarea raportului turațiilor n/n_0 , pentru care se asigură în instalație valoarea impusă a debitului, $Q_F = 10$ l/s;
- ② Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare.

Problema 4.3.7.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație sub presiune și rezervor de refulare deschis la presiunea atmosferică, din figura 4.35. Turbopompa **P** este antrenată de un motor cu turație variabilă și funcționează la o turație n , mai mică decât turația nominală n_0 , anume: $n = 0,5n_0$.

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.29. Densitatea apei este $\rho = 1000$ kg/m³, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10$ m/s².

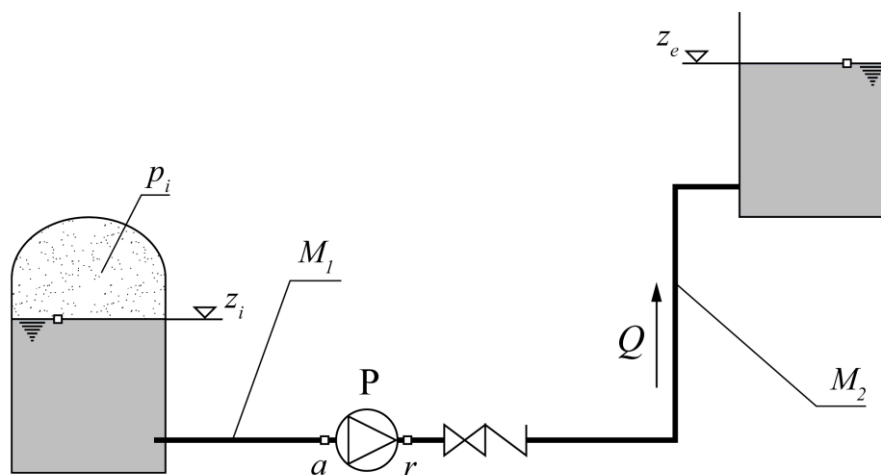


Fig. 4.35. – Instalație hidraulică cu rezervor de aspirație sub presiune

Tabel 4.29. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.35

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	2
cota geodezică, z_e [m]	20
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	1,1
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	0
modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s ² /m ⁵]	30000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s ² /m ⁵]	100000

Caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ a pompei la turația nominală n_0 , respectiv caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ se dau **sub formă tabelară** (vezi tabelul 4.30), pe perechi de valori $\{Q_0, H_0\}$ și $\{Q_0, \eta_0\}$, pentru câteva valori discrete ale debitului, cuprinse în intervalul $Q \in [0; 30]$ l/s.

Tabel 4.30. – Perechile de valori $\{Q_0, H_0\}$ și $\{Q_0, \eta_0\}$ ale curbelor caracteristice ale pompei

Q_0 [l/s]	0	5	10	15	20	25	30
H_0 [m]	108	106,3	101	92,3	80	64,3	45
η_0 [%]	0	26	45	56	60	56	45

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F , înălțimii de pompare H_F și randamentului η_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al pompei, la turația $n = 0,5n_0$;
- ② Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare P_F , în punctul F .

Problema 4.3.8.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare de aspirație și de refulare sub presiune, din figura 4.36. Turbopompa **P** este antrenată de un motor cu turație variabilă și funcționează la o turație n oarecare.

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.31. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

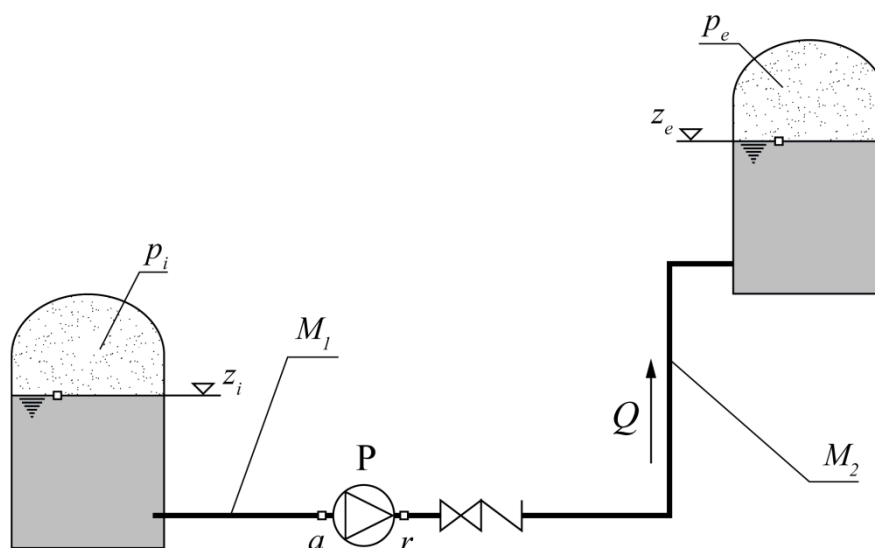


Fig. 4.36. – Instalație hidraulică cu rezervoare sub presiune

Tabel 4.31. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.36

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	8
cota geodezică, z_e [m]	10
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	1,5
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	1,8

modulul de rezistență hidraulică al conductei de aspirație, M_1 [s^2/m^5]	50000
modulul de rezistență hidraulică al conductei de refulare, M_2 [s^2/m^5]	100000

Caracteristica energetică $H_0 = H_0(Q_0)$ a pompei la turația nominală n_0 , respectiv caracteristica de randament $\eta_0 = \eta_0(Q_0)$ se dau **sub formă tabelară** (vezi tabelul 4.32), pe perechi de valori $\{Q_0, H_0\}$ și $\{Q_0, \eta_0\}$, pentru câteva valori discrete ale debitului, cuprinse în intervalul $Q \in [0; 30]$ l/s.

Tabel 4.32. – Perechile de valori $\{Q_0, H_0\}$ și $\{Q_0, \eta_0\}$ ale curbelor caracteristice ale pompei

Q_0 [l/s]	0	5	10	15	20	25	30
H_0 [m]	116	113,8	107	95,8	80	59,8	35
η_0 [%]	0	26	45	56	60	56	45

Pompa trebuie să asigure în instalație o valoare impusă a înălțimii de pompare, anume: $H_F = 20$ m, unde **F** reprezintă punctul de funcționare energetică impus. Valoarea H_F poate fi obținută când pompa este antrenată cu o anumită turație n (necunoscută).

Se cere:

- ① Să se determine valoarea raportului turațiilor n/n_0 , pentru care se asigură în instalație valoarea impusă a înălțimii de pompare, $H_F = 20$ m;
- ② Să se calculeze puterea electrică consumată pentru pompare.

4.4. Funcționarea turbopompelor cuplate în serie

Problema 4.4.1.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică, din figura 4.37. Turbopompele **P**₁ și **P**₂ sunt montate în serie și funcționează la turație nominală.

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.33.

Densitatea apei este $\rho = 1000$ kg/m³, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10$ m/s².

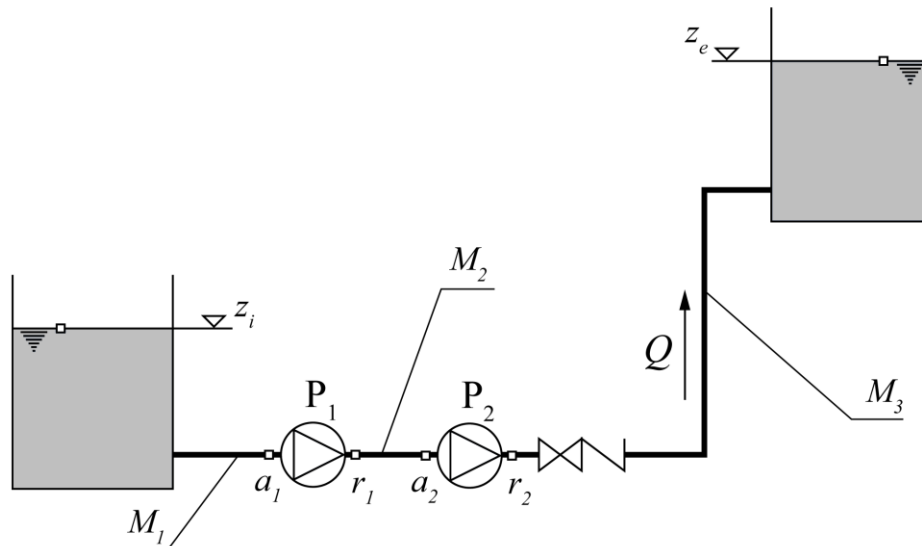


Fig. 4.37. – Instalație hidraulică cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică

Tabel 4.33. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.37

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	44
presiunea, $p_i = p_e$ [bar, scară manometrică]	0
modulul de rezistență hidraulică M_1 [s^2/m^5]	4000
modulul de rezistență hidraulică M_2 [s^2/m^5]	1000
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s^2/m^5]	10000

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă grafică** în figura 4.38.

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în serie al celor două pompe;
- ② Să se determine valorile debitelor Q_{Fj} , înălțimilor de pompare H_{Fj} și randamentelor η_{Fj} cu $j \in \{1; 2\}$, în punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, F_1 și F_2 ;
- ③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

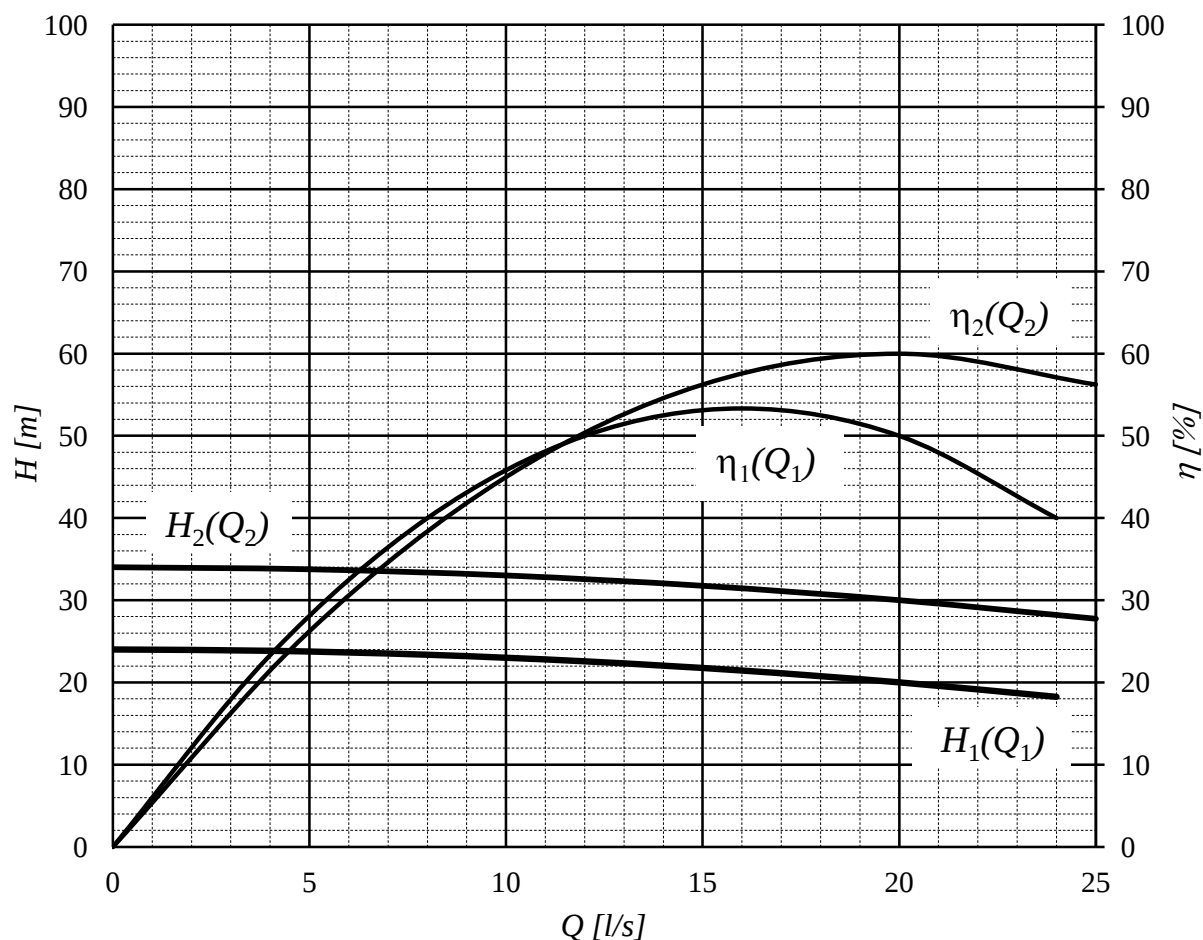


Fig. 4.38. – Curbele caracteristice $H_j = H_j(Q_j)$ și $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, ale pompelor P_1 și P_2 din figura 4.37

Indicații pentru rezolvare: Calculele se vor efectua cu unități de măsură din S.I. Pentru rezolvare, se recomandă raportarea la Problema 2.4.2, soluționată în capitolul 2.

Problema 4.4.2.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație deschis la presiunea atmosferică și rezervor de refulare sub presiune, din figura 4.39. Turbopompele P_1 și P_2 sunt montate în serie și funcționează la turație nominală.

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.34. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă grafică** în figura 4.40.

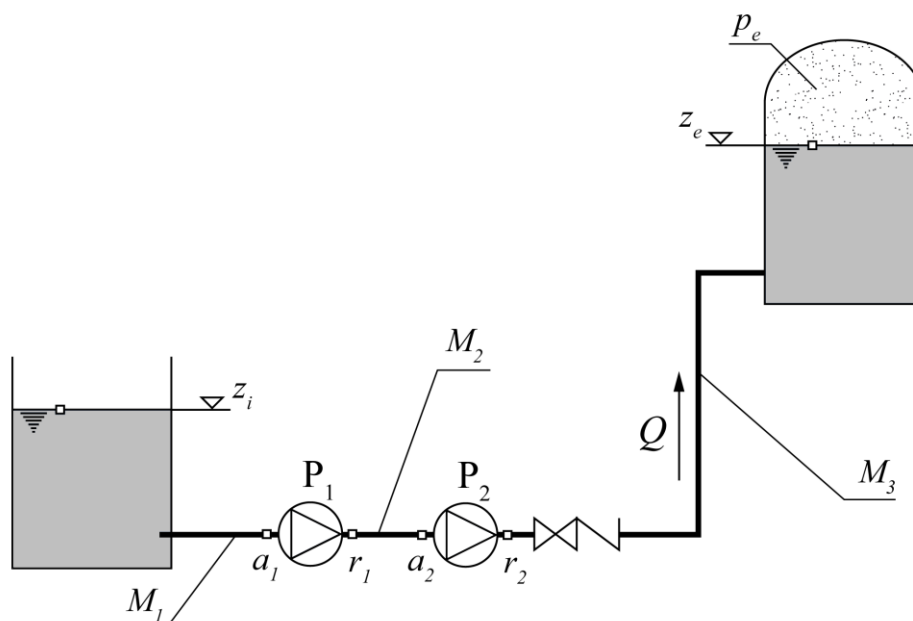


Fig. 4.39. – Instalație hidraulică cu rezervor de refulare sub presiune

Tabel 4.34. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.39

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	5
cota geodezică, z_e [m]	15
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	3
modulul de rezistență hidraulică M_1 [s^2/m^5]	5000
modulul de rezistență hidraulică M_2 [s^2/m^5]	2000
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s^2/m^5]	18000

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în serie al celor două pompe;
- ② Să se determine valorile debitelor Q_{Fj} , înălțimilor de pompare H_{Fj} și randamentelor η_{Fj} cu $j \in \{1; 2\}$, în punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, F_1 și F_2 ;
- ③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

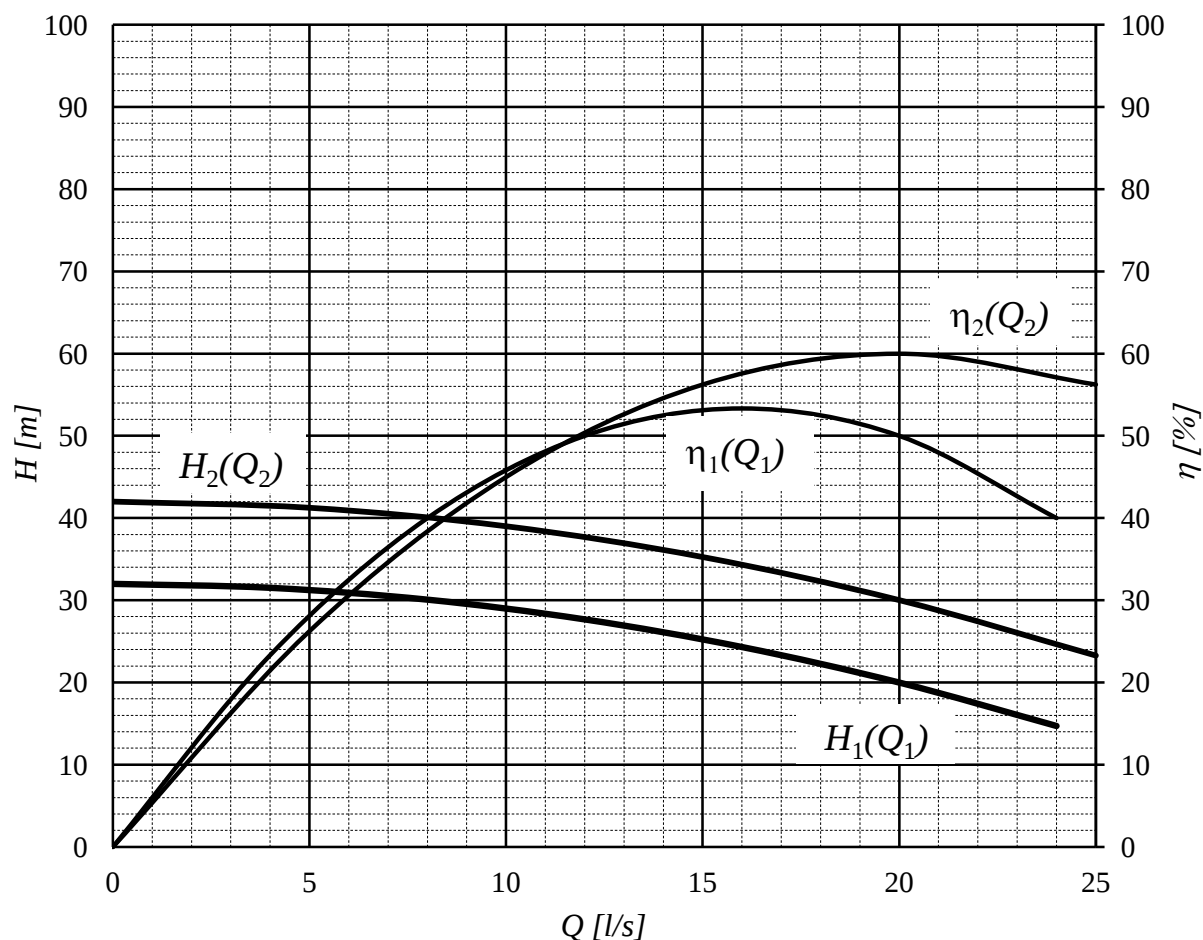


Fig. 4.40. – Curbele caracteristice ale pompelor P_1 și P_2 din figura 4.39

Problema 4.4.3.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație sub presiune și rezervor de refulare deschis la presiunea atmosferică, din figura 4.41. Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice prezentate în tabelul 4.35.

Tabel 4.35. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.41

Mărimă și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	5
cota geodezică, z_e [m]	45
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0,4
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	0
modulul de rezistență hidraulică M_1 [s^2/m^5]	5000

modulul de rezistență hidraulică M_2 [s^2/m^5]	1000
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s^2/m^5]	29000

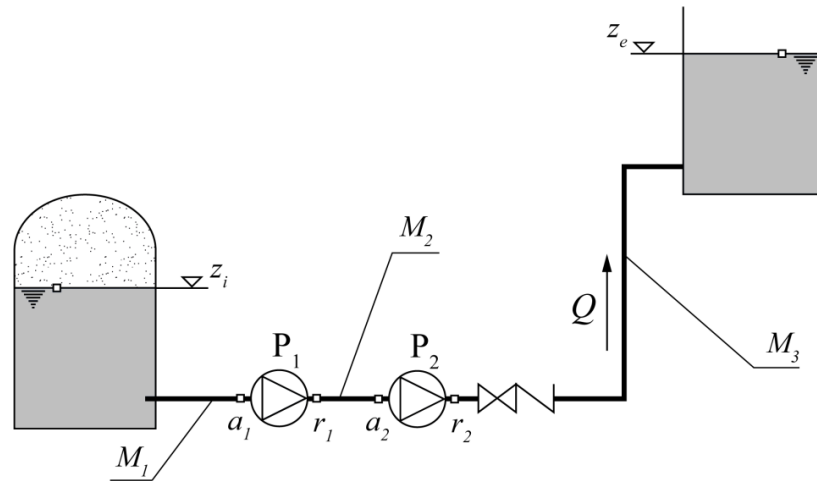
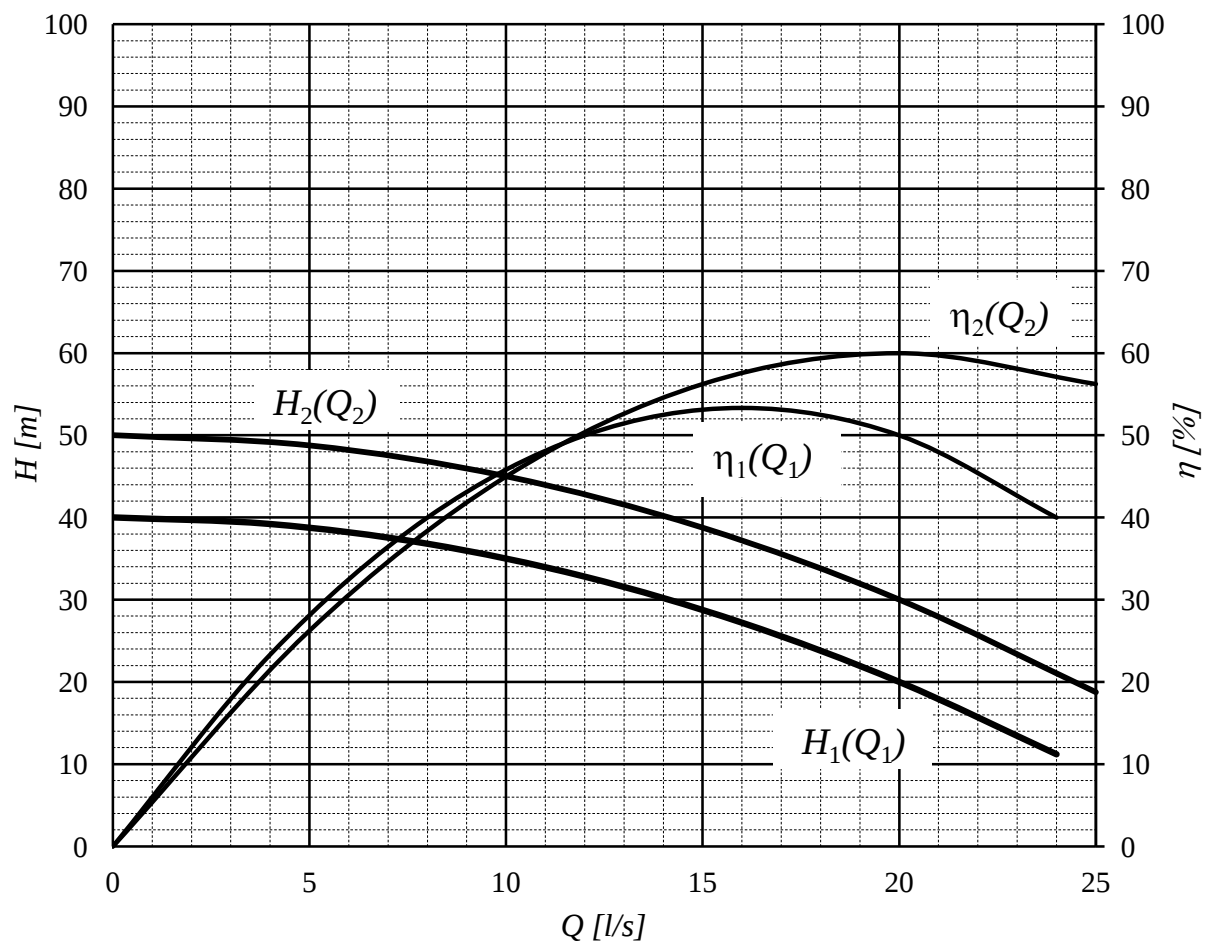


Fig. 4.41. – Instalație hidraulică cu rezervor de aspirație sub presiune


 Fig. 4.42. – Curbele caracteristice ale pompelor P_1 și P_2 din figura 4.41

Turbopompele P_1 și P_2 sunt montate în serie și funcționează la turație nominală. Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă grafică** în figura 4.42.

Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în serie al celor două pompe;
- ② Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

Problema 4.4.4.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare de aspirație și de refulare sub presiune, din figura 4.43. Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice din tabelul 4.36.

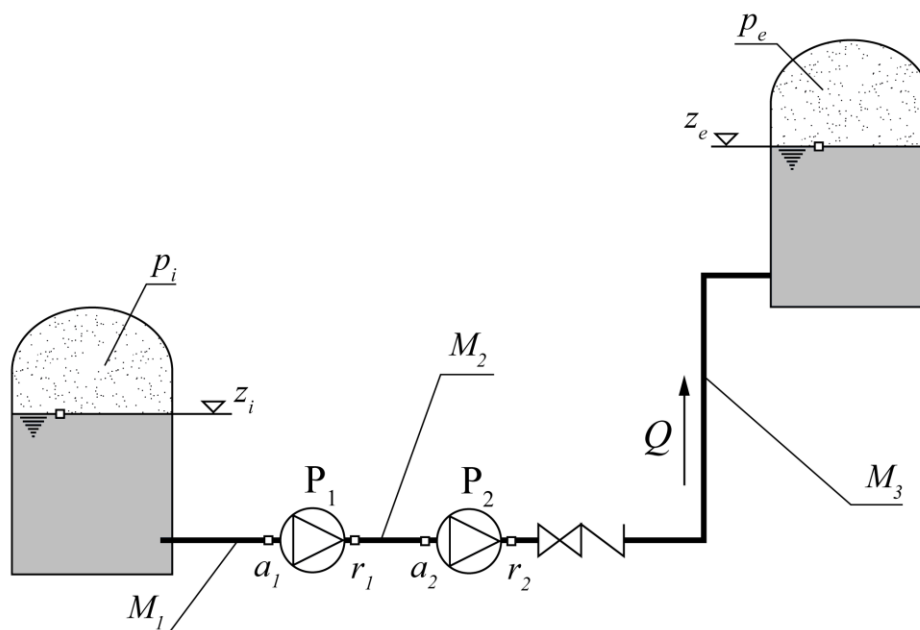


Fig. 4.43. – Instalație hidraulică cu rezervoare sub presiune

Tabel 4.36. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.43

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	12

presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0,5
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	2,7
modulul de rezistență hidraulică M_1 [s^2/m^5]	10000
modulul de rezistență hidraulică M_2 [s^2/m^5]	2000
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s^2/m^5]	28000

Turbopompele P_1 și P_2 sunt montate în serie și funcționează la turație nominală. Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă grafică** în figura 4.44.

Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

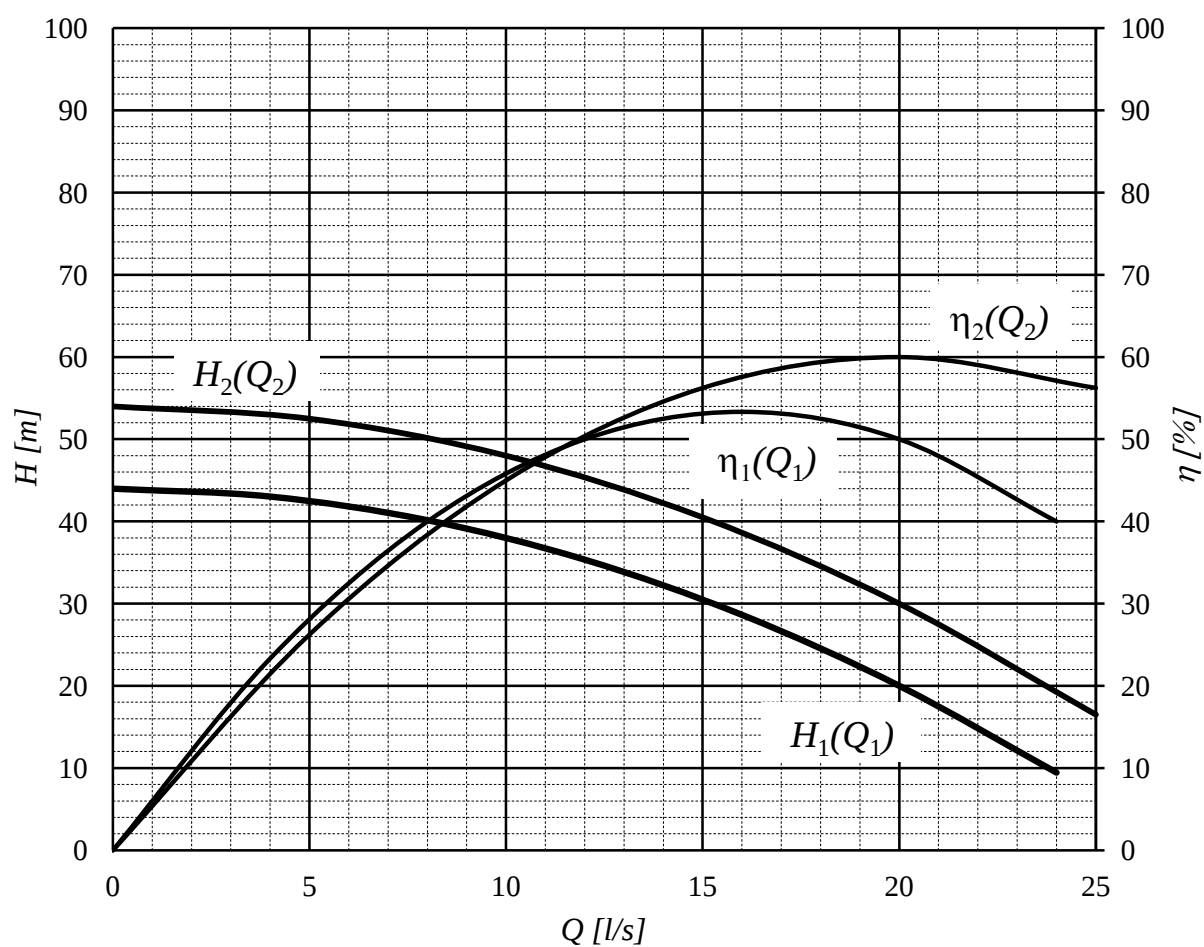


Fig. 4.44. – Curbele caracteristice ale pompelor P_1 și P_2 din figura 4.43

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în serie al celor două pompe;
- ② Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

Problema 4.4.5.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică, din figura 4.45. Turbopompele P_1 și P_2 sunt montate în serie și funcționează la turație nominală.

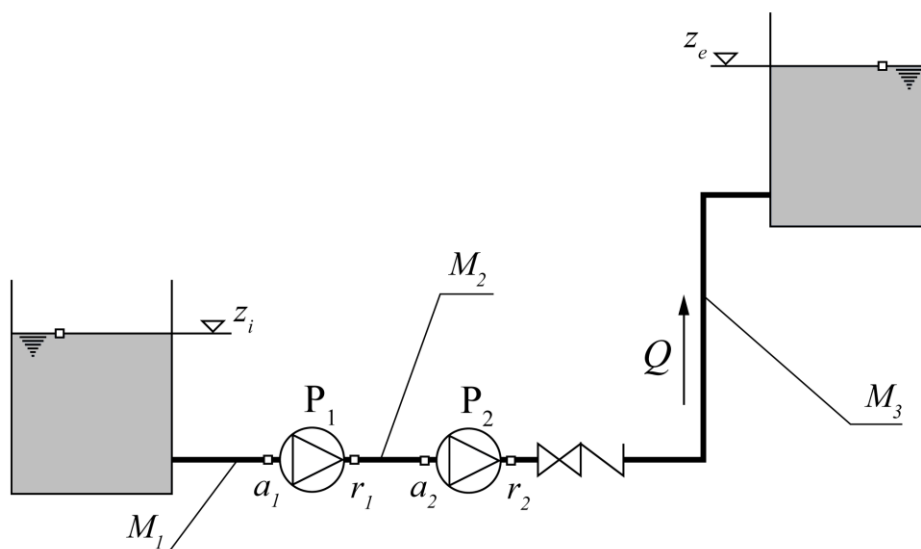


Fig. 4.45. – Instalație hidraulică cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice din tabelul 4.37.

Tabel 4.37. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.45

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	4
cota geodezică, z_e [m]	30
presiunea, $p_i = p_e$ [bar, scară manometrică]	0
modulul de rezistență hidraulică M_1 [s^2/m^5]	17000
modulul de rezistență hidraulică M_2 [s^2/m^5]	3000
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s^2/m^5]	40000

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă tabelară** în tabelul 4.38, pe perechi de valori $\{Q_j, H_j\}$, respectiv $\{Q_j, \eta_j\}$, pentru valori discrete ale debitului.

Tabel 4.38. – Perechile de valori $\{Q_j, H_j\}$ și $\{Q_j, \eta_j\}$, cu $j \in \{1; 2\}$, ale curbelor caracteristice ale pompelor

Q_1 [l/s]	0	4	8	12	16	20	24
H_1 [m]	60	58,4	53,6	45,6	34,4	20	2,4
η_1 [%]	0	23	40	50	53	50	40
Q_2 [l/s]	0	5	10	15	20	25	
H_2 [m]	70	67,5	60	47,5	30	7,5	
η_2 [%]	0	26	45	56	60	56	

Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în serie al celor două pompe;
- ② Să se determine valorile debitelor Q_{Fj} , înălțimilor de pompare H_{Fj} și randamentelor η_{Fj} cu $j \in \{1; 2\}$, în punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, F_1 și F_2 ;
- ③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

Indicații pentru rezolvare: Calculele se vor efectua cu unități de măsură din S.I. Pentru rezolvare, se recomandă raportarea la Problema 2.4.2, soluționată în capitolul 2.

Problema 4.4.6.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație deschis la presiunea atmosferică și rezervor de refulare sub presiune, din figura 4.46. Turbopompele P_1 și P_2 sunt montate în serie și funcționează la turație nominală.

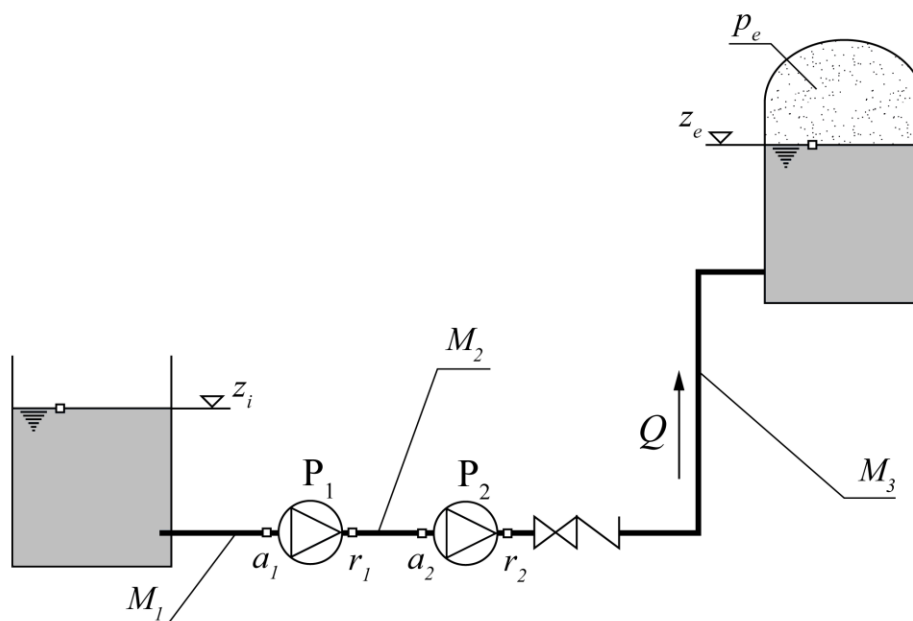


Fig. 4.46. – Instalație hidraulică cu rezervor de refulare sub presiune

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice din tabelul 4.39. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Tabel 4.39. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.46

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	10
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	3,2
modulul de rezistență hidraulică M_1 [s^2/m^5]	7000
modulul de rezistență hidraulică M_2 [s^2/m^5]	1000
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s^2/m^5]	12000

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă tabelară** în tabelul 4.40, pe perechi de valori $\{Q_j, H_j\}$, respectiv $\{Q_j, \eta_j\}$, pentru valori discrete ale debitului.

Tabel 4.40. – Perechile de valori $\{Q_j, H_j\}$ și $\{Q_j, \eta_j\}$, cu $j \in \{1; 2\}$, ale curbelor caracteristice ale pompelor

Q_1 [l/s]	0	4	8	12	16	20	24
H_1 [m]	28	27,7	26,7	25,1	22,9	20	16,5
η_1 [%]	0	23	40	50	53	50	40
Q_2 [l/s]	0	5	10	15	20	25	
H_2 [m]	38	37,5	36	33,5	30	25,5	
η_2 [%]	0	26	45	56	60	56	

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în serie al celor două pompe;
- ② Să se determine valorile debitelor Q_{Fj} , înălțimilor de pompare H_{Fj} și randamentelor η_{Fj} cu $j \in \{1; 2\}$, în punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, F_1 și F_2 ;
- ③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

Problema 4.4.7.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație sub presiune și rezervor de refulare deschis la presiunea atmosferică, din figura 4.47.

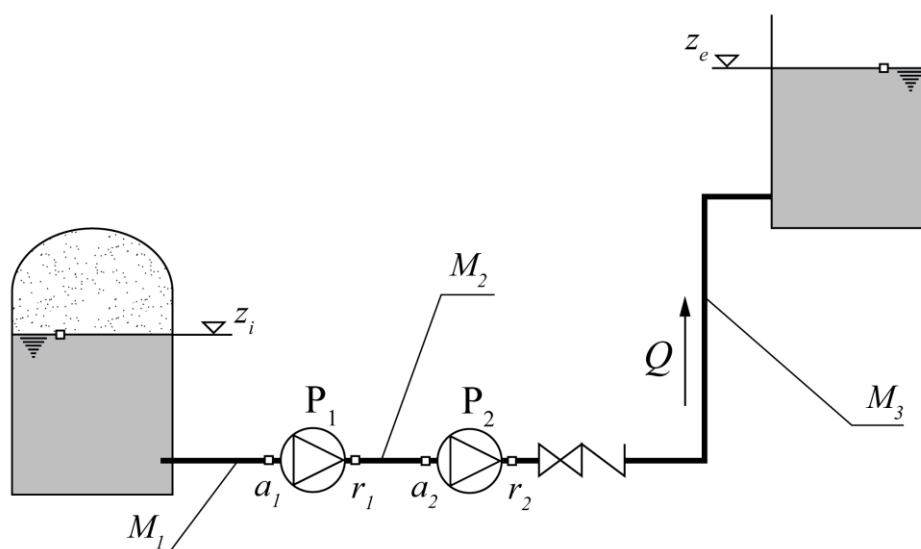


Fig. 4.47. – Instalație hidraulică cu rezervor de aspirație sub presiune

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice din tabelul 4.41. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Tabel 4.41. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.47

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	36
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0,4
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	0
modulul de rezistență hidraulică M_1 [s^2/m^5]	15000
modulul de rezistență hidraulică M_2 [s^2/m^5]	2000
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s^2/m^5]	28000

Turbopompele $\mathbf{P}_1$ și $\mathbf{P}_2$ sunt montate în serie și funcționează la turație nominală. Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă tabelară** în tabelul 4.42, pe perechi de valori $\{Q_j, H_j\}$, respectiv $\{Q_j, \eta_j\}$, pentru valori discrete ale debitului.

Tabel 4.42. – Perechile de valori $\{Q_j, H_j\}$ și $\{Q_j, \eta_j\}$, cu $j \in \{1; 2\}$, ale curbelor caracteristice ale pompelor

Q_1 [l/s]	0	4	8	12	16	20	24
H_1 [m]	48	46,9	43,5	37,9	30,1	20	7,7
η_1 [%]	0	23	40	50	53	50	40
Q_2 [l/s]	0	5	10	15	20	25	
H_2 [m]	58	56,3	51	42,3	30	14,3	
η_2 [%]	0	26	45	56	60	56	

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în serie al celor două pompe;
- ② Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

Problema 4.4.8.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare de aspirație și de refulare sub presiune, din figura 4.48. Turbopompele P_1 și P_2 sunt montate în serie și funcționează la turație nominală.

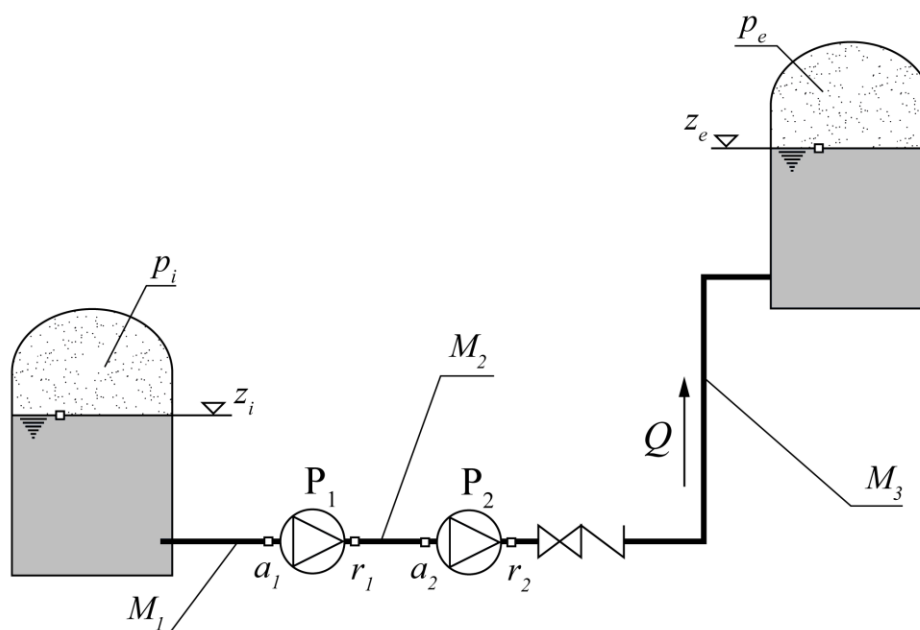


Fig. 4.48. – Instalație hidraulică cu rezervoare sub presiune

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice din tabelul 4.43. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Tabel 4.43. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.48

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	5
cota geodezică, z_e [m]	15
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	1,2
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	3

modulul de rezistență hidraulică M_1 [s^2/m^5]	17500
modulul de rezistență hidraulică M_2 [s^2/m^5]	2500
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s^2/m^5]	35000

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă tabelară** în tabelul 4.44, pe perechi de valori $\{Q_j, H_j\}$, respectiv $\{Q_j, \eta_j\}$, pentru valori discrete ale debitului.

Tabel 4.44. – Perechile de valori $\{Q_j, H_j\}$ și $\{Q_j, \eta_j\}$, cu $j \in \{1; 2\}$, ale curbelor caracteristice ale pompelor

Q_1 [l/s]	0	4	8	12	16	20	24
H_1 [m]	56	54,6	50,2	43	33	20	4,2
η_1 [%]	0	23	40	50	53	50	40
Q_2 [l/s]	0	5	10	15	20	25	
H_2 [m]	66	63,8	57	45,8	30	9,7	
η_2 [%]	0	26	45	56	60	56	

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în serie al celor două pompe;
- ② Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

4.5. Funcționarea turbopompelor cuplate în paralel

Problema 4.5.1.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică, din figura 4.49. Turbopompele P_1 și P_2 sunt montate în paralel și funcționează la turație nominală. Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice din tabelul 4.45. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

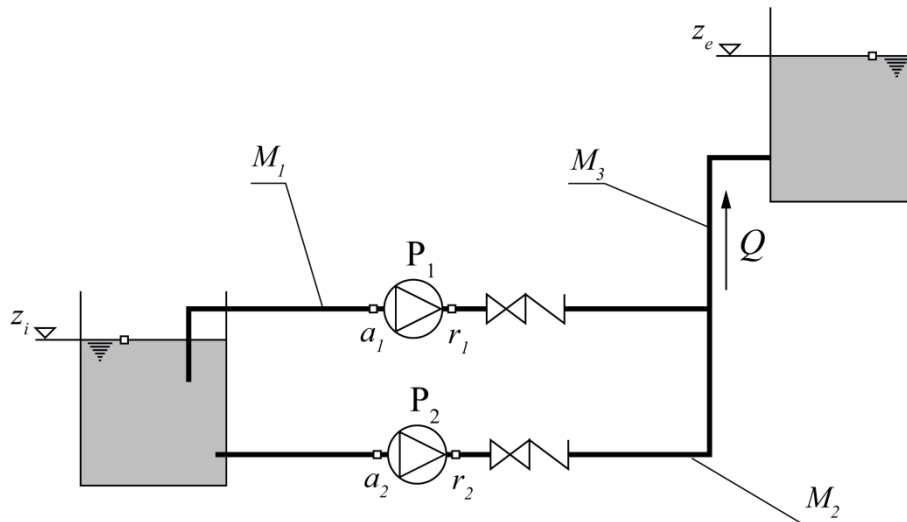


Fig. 4.49. – Instalație hidraulică cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică

Tabel 4.45. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.49

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	6
presiunea, $p_i = p_e$ [bar, scară manometrică]	0
modulul de rezistență hidraulică M_1 [s^2/m^5]	5000
modulul de rezistență hidraulică M_2 [s^2/m^5]	5555
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s^2/m^5]	5600

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă grafică** în figura 4.50.

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în paralel al celor două pompe;
- ② Să se determine valorile debitelor Q_{Fj} , înălțimilor de pompare H_{Fj} și randamentelor η_{Fj} cu $j \in \{1; 2\}$, în punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, F_1 și F_2 ;
- ③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

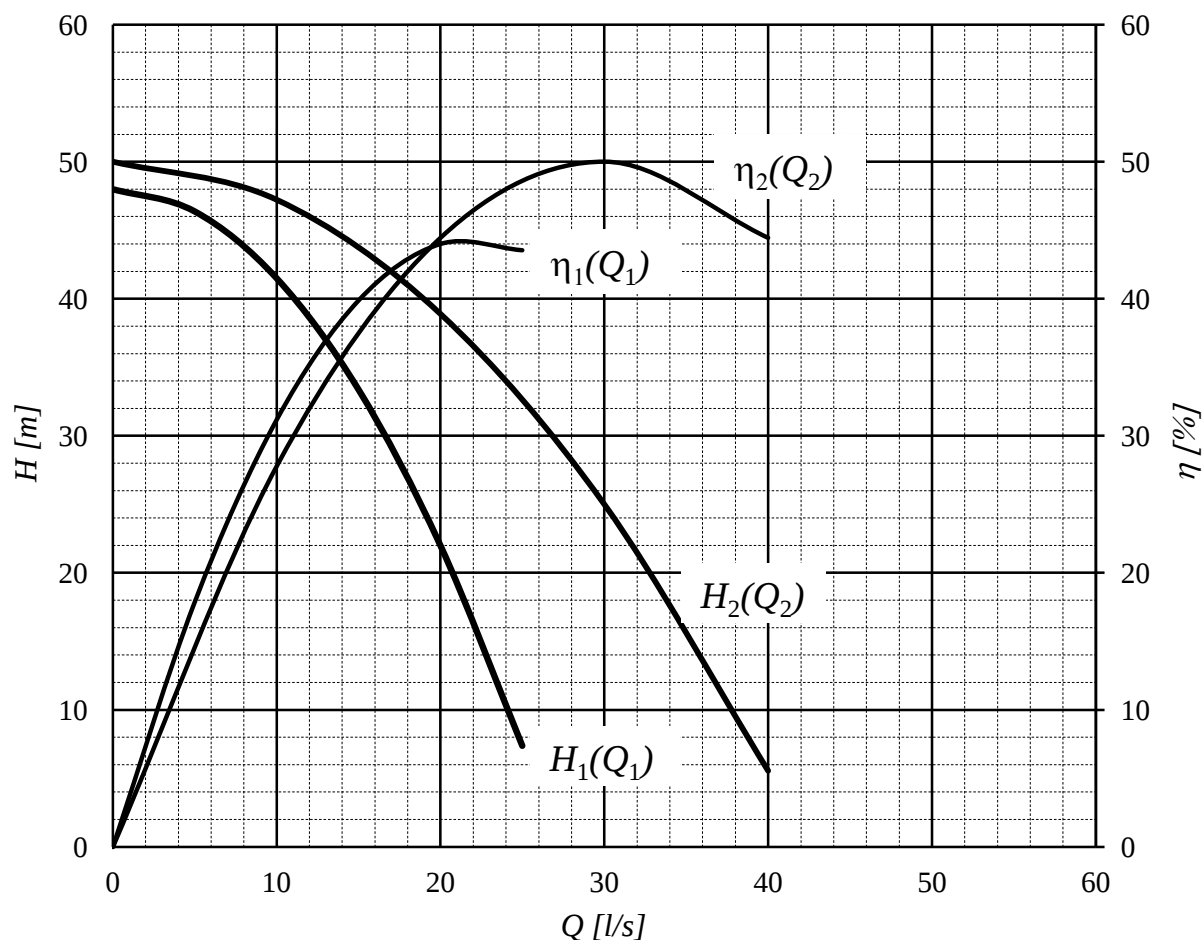


Fig. 4.50. – Curbele caracteristice $H_j = H_j(Q_j)$ și $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, ale pompelor P_1 și P_2 din figura 4.49

Indicații pentru rezolvare: Calculele se vor efectua cu unități de măsură din S.I. Pentru rezolvare, se recomandă raportarea la Problema 2.5.3, soluționată în capitolul 2.

Problema 4.5.2.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație deschis la presiunea atmosferică și rezervor de refulare sub presiune, din figura 4.51. Turbopompele P_1 și P_2 sunt montate în paralel și funcționează la turație nominală.

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice din tabelul 4.46. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă grafică** în figura 4.52.

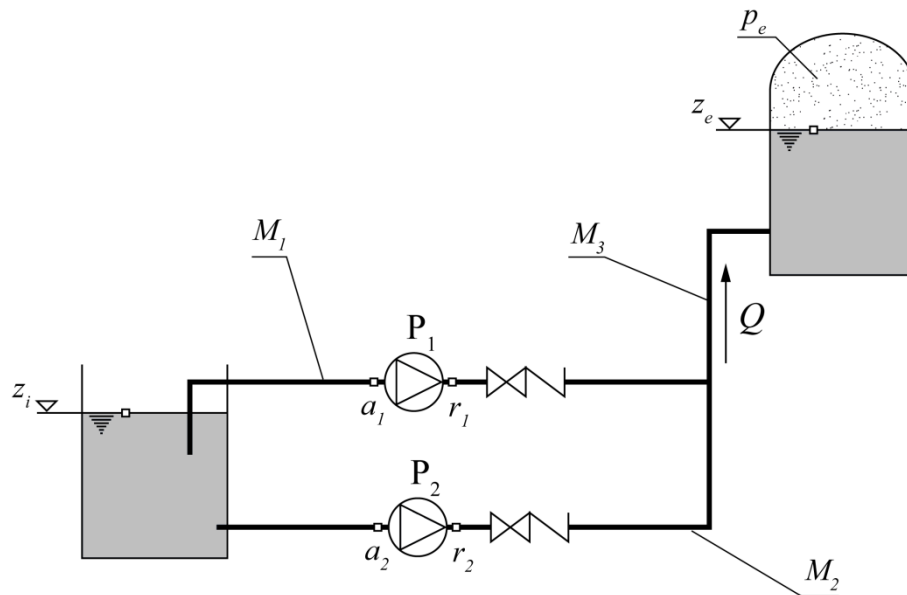


Fig. 4.51. – Instalație hidraulică cu rezervor de refulare sub presiune

Tabel 4.46. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.51

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	4
cota geodezică, z_e [m]	10
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	0,9
modulul de rezistență hidraulică M_1 [s^2/m^5]	5000
modulul de rezistență hidraulică M_2 [s^2/m^5]	5555
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s^2/m^5]	2000

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în paralel al celor două pompe;
- ② Să se determine valorile debitelor Q_{Fj} , înălțimilor de pompare H_{Fj} și randamentelor η_{Fj} cu $j \in \{1; 2\}$, în punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, F_1 și F_2 ;
- ③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

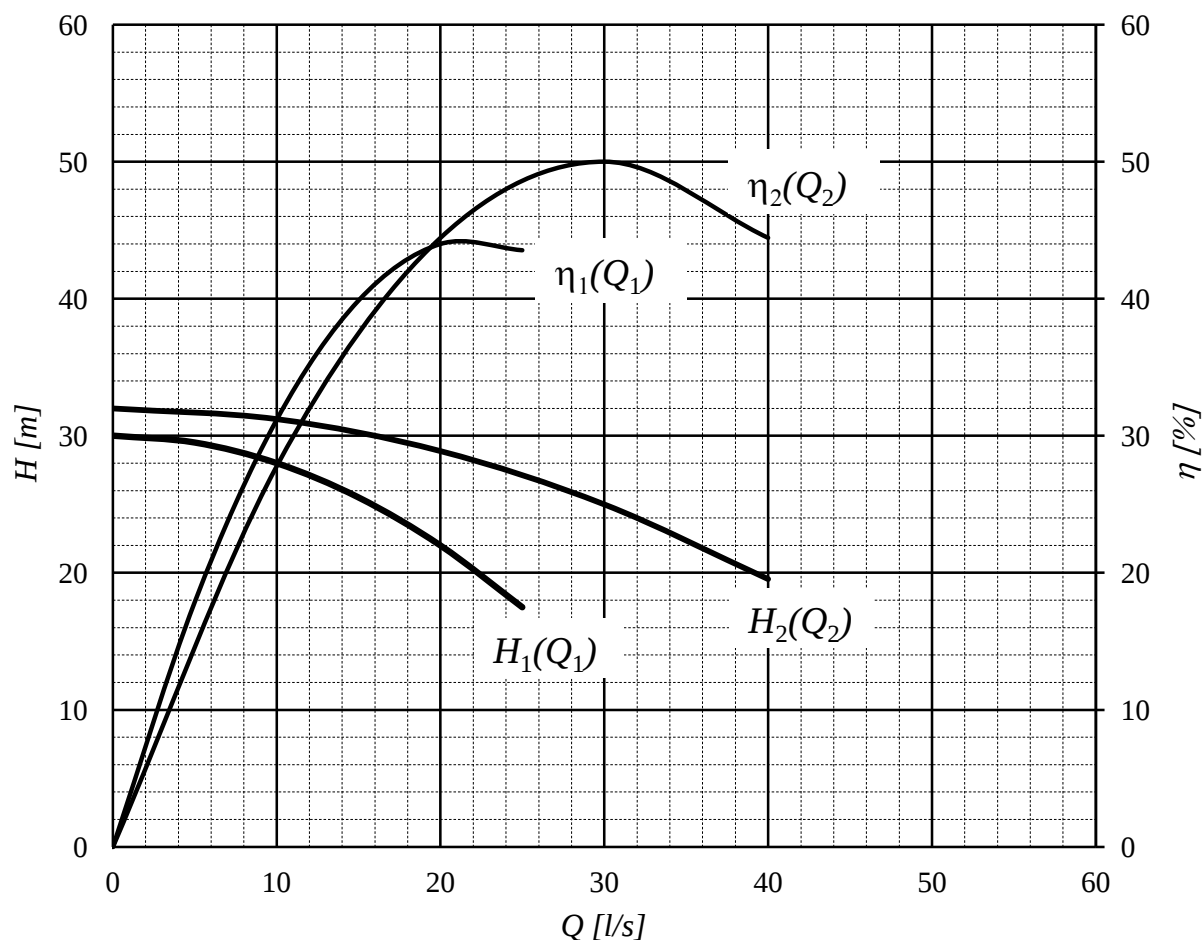


Fig. 4.52. – Curbele caracteristice ale pompelor P_1 și P_2 din figura 4.51

Problema 4.5.3.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație sub presiune și rezervor de refulare deschis la presiunea atmosferică, din figura 4.53. Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice din tabelul 4.47.

Tabel 4.47. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.53

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	20
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0,8
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	0
modulul de rezistență hidraulică M_1 [s ² /m ⁵]	5000

modulul de rezistență hidraulică M_2 [s^2/m^5]	5555
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s^2/m^5]	3200

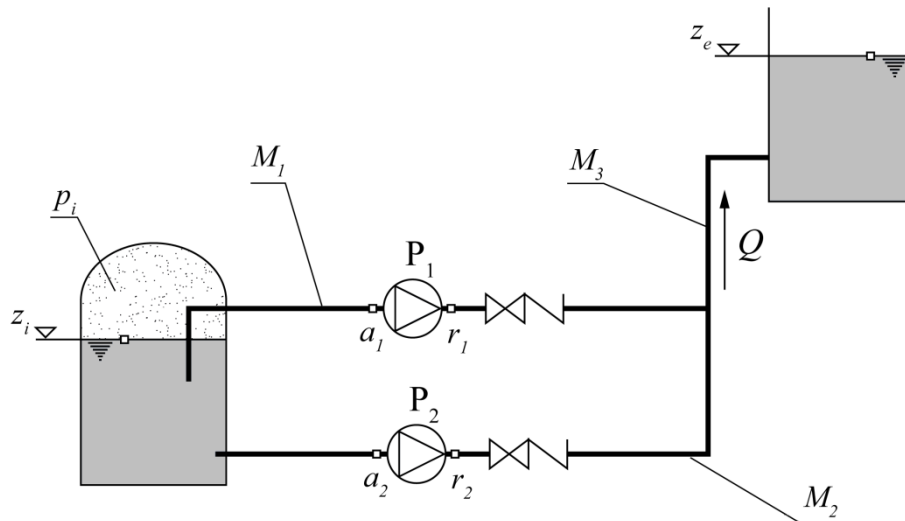
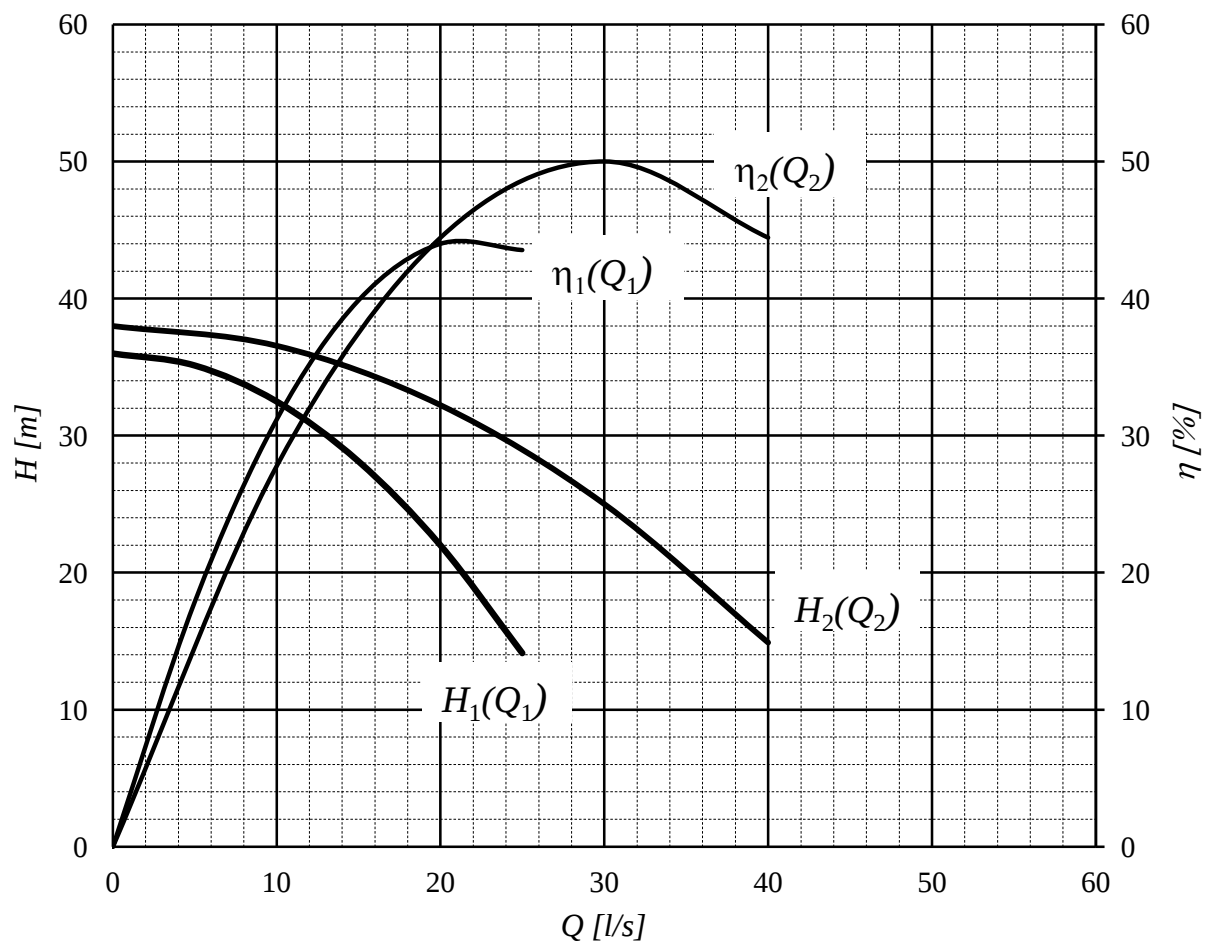


Fig. 4.53. – Instalație hidraulică cu rezervor de aspirație sub presiune


 Fig. 4.54. – Curbele caracteristice ale pompelor P_1 și P_2 din figura 4.53

Turbopompele P_1 și P_2 sunt montate în paralel și funcționează la turație nominală. Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă grafică** în figura 4.54.

Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în paralel al celor două pompe;
- ② Să se determine valorile debitelor Q_{Fj} , înălțimilor de pompare H_{Fj} și randamentelor η_{Fj} cu $j \in \{1; 2\}$, în punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, F_1 și F_2 ;
- ③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

Problema 4.5.4.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare de aspirație și de refulare sub presiune, din figura 4.55. Turbopompele P_1 și P_2 sunt montate în paralel și funcționează la turație nominală.

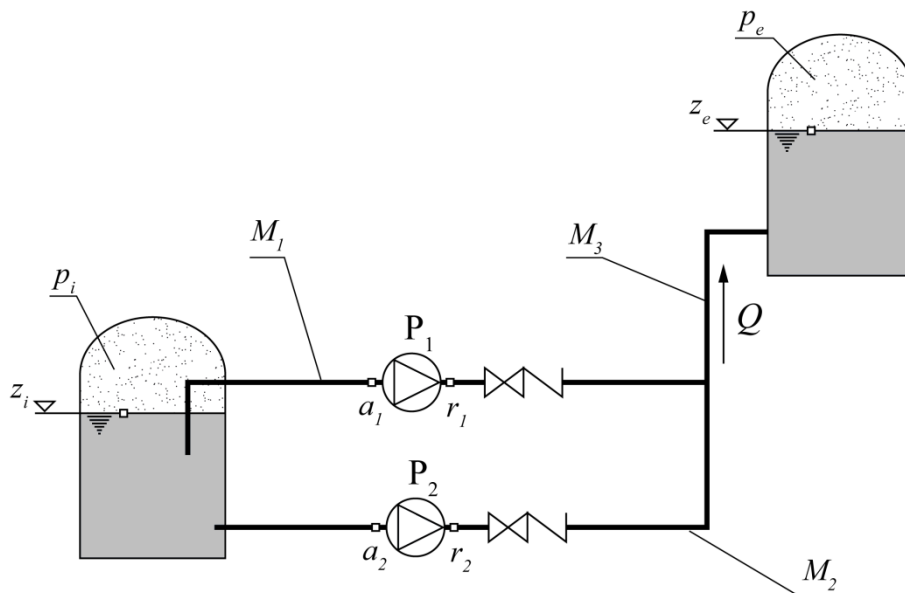


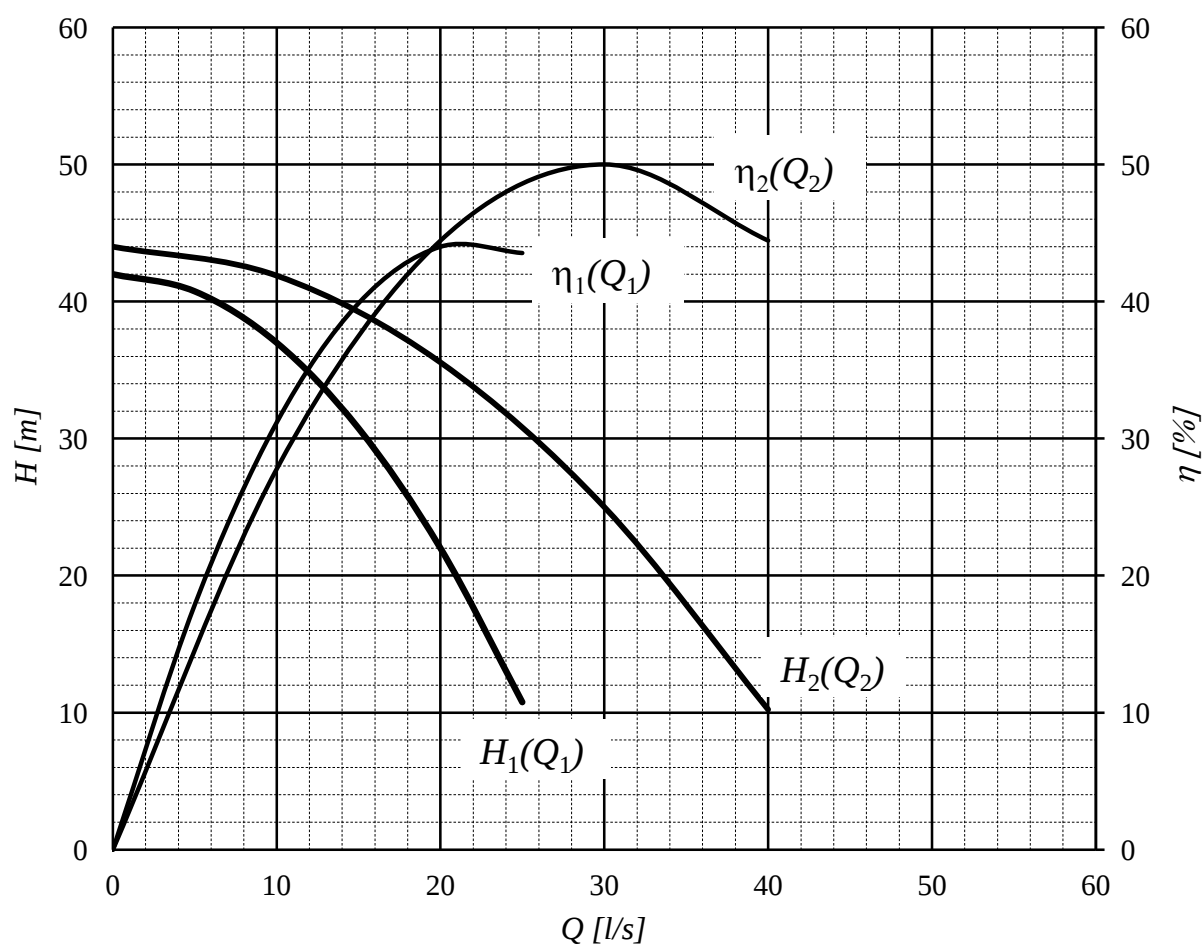
Fig. 4.55. – Instalație hidraulică cu rezervoare sub presiune

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice din tabelul 4.48. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Tabel 4.48. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.55

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	5
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	1,3
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	1,7
modulul de rezistență hidraulică M_1 [s ² /m ⁵]	5000
modulul de rezistență hidraulică M_2 [s ² /m ⁵]	5555
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s ² /m ⁵]	4400

Curbele caracteristice ale pompelor la turația nominală: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt **trasate grafic** în figura 4.56.

Fig. 4.56. – Curbele caracteristice ale pompelor P_1 și P_2 din figura 4.55

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în paralel al celor două pompe;
- ② Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

Problema 4.5.5.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică, din figura 4.57. Turbopompele P_1 și P_2 sunt montate în paralel și funcționează la turație nominală.

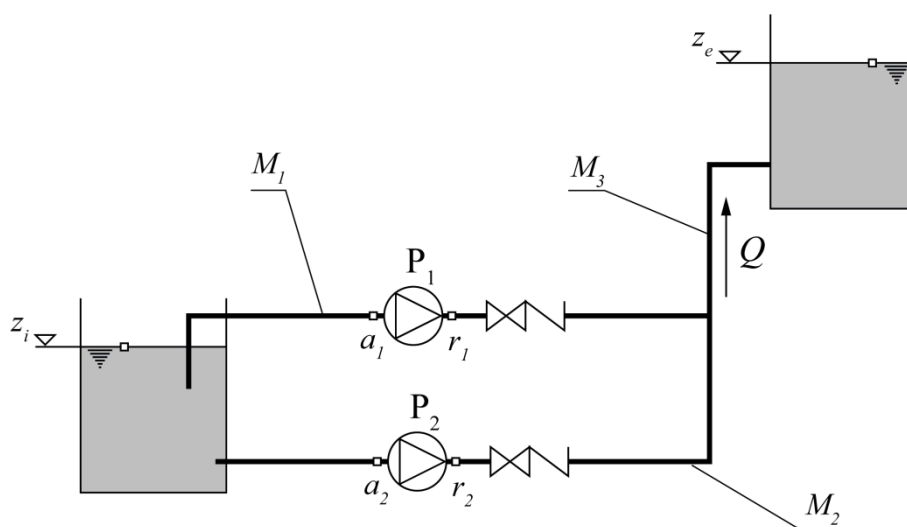


Fig. 4.57. – Instalație hidraulică cu rezervoare deschise la presiunea atmosferică

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice din tabelul 4.49.

Tabel 4.49. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.57

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	2
cota geodezică, z_e [m]	10
presiunea, $p_i = p_e$ [bar, scară manometrică]	0
modulul de rezistență hidraulică M_1 [s^2/m^5]	5000
modulul de rezistență hidraulică M_2 [s^2/m^5]	5555
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s^2/m^5]	4800

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă tabelară** în tabelul 4.50, pe perechi de valori $\{Q_j, H_j\}$, respectiv $\{Q_j, \eta_j\}$, pentru valori discrete ale debitului.

Tabel 4.50. – Perechile de valori $\{Q_j, H_j\}$ și $\{Q_j, \eta_j\}$, cu $j \in \{1; 2\}$, ale curbelor caracteristice ale pompelor

Q_1 [l/s]	0	5	10	15	20	25
H_1 [m]	44	42,6	38,5	31,6	22	9,6
η_1 [%]	0	18	31	40	44	44
Q_2 [l/s]	0	10	20	30	40	
H_2 [m]	46	43,7	36,7	25	8,7	
η_2 [%]	0	28	44	50	44	

Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în paralel al celor două pompe;
- ② Să se determine valorile debitelor Q_{Fj} , înălțimilor de pompare H_{Fj} și randamentelor η_{Fj} cu $j \in \{1; 2\}$, în punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, F_1 și F_2 ;
- ③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

Indicații pentru rezolvare: Calculele se vor efectua cu unități de măsură din S.I. Pentru rezolvare, se recomandă raportarea la Problema 2.5.3, soluționată în capitolul 2.

Problema 4.5.6.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație deschis la presiunea atmosferică și rezervor de refulare sub presiune, din figura 4.58. Turbopompele P_1 și P_2 sunt montate în paralel și funcționează la turație nominală.

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice din tabelul 4.51.

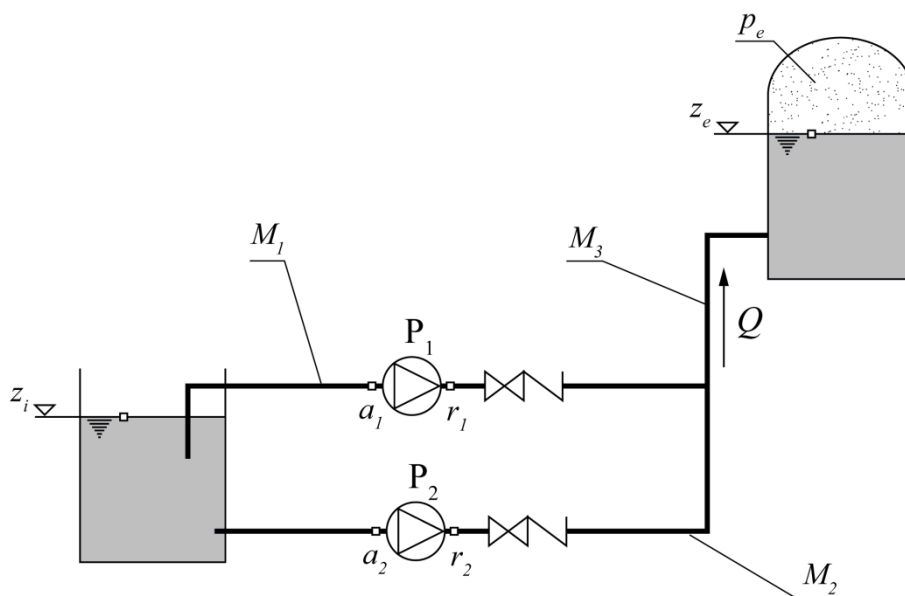


Fig. 4.58. – Instalație hidraulică cu rezervor de refulare sub presiune

Tabel 4.51. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.58

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	3
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	0,8
modulul de rezistență hidraulică M_1 [s^2/m^5]	5000
modulul de rezistență hidraulică M_2 [s^2/m^5]	5555
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s^2/m^5]	3600

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă tabelară** în tabelul 4.52, pe perechi de valori $\{Q_j, H_j\}$, respectiv $\{Q_j, \eta_j\}$, pentru valori discrete ale debitului.

Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Se cere:

① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în paralel al celor două pompe;

- ② Să se determine valorile debitelor Q_{Fj} , înălțimilor de pompare H_{Fj} și randamentelor η_{Fj} cu $j \in \{1; 2\}$, în punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, F_1 și F_2 ;
- ③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

Tabel 4.52. – Perechile de valori $\{Q_j, H_j\}$ și $\{Q_j, \eta_j\}$, cu $j \in \{1; 2\}$, ale curbelor caracteristice ale pompelor

Q_1 [l/s]	0	5	10	15	20	25
H_1 [m]	38	37	34	29	22	13
η_1 [%]	0	18	31	40	44	44
Q_2 [l/s]	0	10	20	30	40	
H_2 [m]	40	38,3	33,3	25	13,3	
η_2 [%]	0	28	44	50	44	

Problema 4.5.7.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervor de aspirație sub presiune și rezervor de refulare deschis la presiunea atmosferică, din figura 4.59. Turbopompele P_1 și P_2 sunt montate în paralel și funcționează la turație nominală.

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice din tabelul 4.53. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

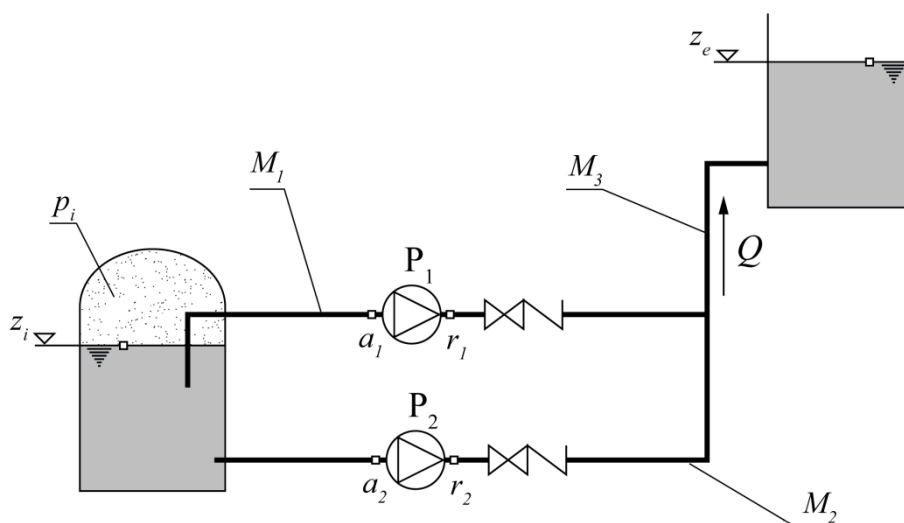


Fig. 4.59. – Instalație hidraulică cu rezervor de aspirație sub presiune

Tabel 4.53. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.59

Mărime și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	5
cota geodezică, z_e [m]	25
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	0,6
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	0
modulul de rezistență hidraulică M_1 [s^2/m^5]	5000
modulul de rezistență hidraulică M_2 [s^2/m^5]	5555
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s^2/m^5]	2400

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă tabelară** în tabelul 4.54, pe perechi de valori $\{Q_j, H_j\}$, respectiv $\{Q_j, \eta_j\}$, pentru valori discrete ale debitului.

Tabel 4.54. – Perechile de valori $\{Q_j, H_j\}$ și $\{Q_j, \eta_j\}$, cu $j \in \{1; 2\}$, ale curbelor caracteristice ale pompelor

Q_1 [l/s]	0	5	10	15	20	25
H_1 [m]	32	31,4	29,5	26,4	22	16,4
η_1 [%]	0	18	31	40	44	44
Q_2 [l/s]	0	10	20	30	40	
H_2 [m]	34	33	30	25	18	
η_2 [%]	0	28	44	50	44	

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în paralel al celor două pompe;
- ② Să se determine valorile debitelor Q_{Fj} , înălțimilor de pompare H_{Fj} și randamentelor η_{Fj} cu $j \in \{1; 2\}$, în punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, F_1 și F_2 ;

③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

Problema 4.5.8.

Se consideră instalația de pompare, cu rezervoare de aspirație și de refulare sub presiune, din figura 4.60. Turbopompele P_1 și P_2 sunt montate în paralel și funcționează la turație nominală.

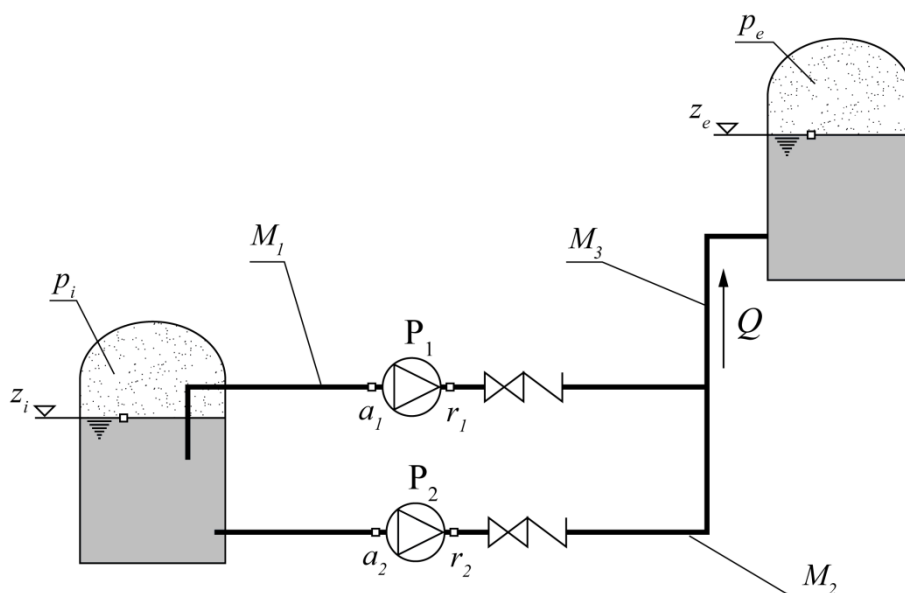


Fig. 4.60. – Instalație hidraulică cu rezervoare sub presiune

Instalația este caracterizată de elementele geometrice și hidraulice din tabelul 4.55. Densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională se consideră $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

Tabel 4.55. – Date aferente instalației de pompare din figura 4.60

Mărimă și unitate de măsură	Valoare numerică
cota geodezică, z_i [m]	0
cota geodezică, z_e [m]	3
presiunea, p_i [bar, scară manometrică]	1,3
presiunea, p_e [bar, scară manometrică]	1,7
modulul de rezistență hidraulică M_1 [s^2/m^5]	5000
modulul de rezistență hidraulică M_2 [s^2/m^5]	5555
modulul de rezistență hidraulică M_3 [s^2/m^5]	5200

Curbele caracteristice ale fiecărei pompe la turația nominală, anume: caracteristica energetică $H_j = H_j(Q_j)$ și caracteristica de randament $\eta_j = \eta_j(Q_j)$, cu $j \in \{1; 2\}$, sunt date **sub formă tabelară** în tabelul 4.56, pe perechi de valori $\{Q_j, H_j\}$, respectiv $\{Q_j, \eta_j\}$, pentru valori discrete ale debitului.

Tabel 4.56. – Perechile de valori $\{Q_j, H_j\}$ și $\{Q_j, \eta_j\}$, cu $j \in \{1; 2\}$, ale curbelor caracteristice ale pompelor

Q_1 [l/s]	0	5	10	15	20	25
H_1 [m]	46	44,5	40	32,5	22	8,5
η_1 [%]	0	18	31	40	44	44
Q_2 [l/s]	0	10	20	30	40	
H_2 [m]	48	45,4	37,8	25	7,1	
η_2 [%]	0	28	44	50	44	

Se cere:

- ① Să se determine valorile debitului Q_F și înălțimii de pompare H_F în punctul de funcționare energetică $F(Q_F, H_F)$ al cuplajului în paralel al celor două pompe;
- ② Să se determine valorile debitelor Q_{Fj} , înălțimilor de pompare H_{Fj} și randamentelor η_{Fj} cu $j \in \{1; 2\}$, în punctele de funcționare energetică ale fiecărei pompe, F_1 și F_2 ;
- ③ Să se calculeze puterea electrică totală consumată pentru pompare.

REFERINȚE BIBLIOGRAFICE

- [1] Anton A., 2013, *Concepte în PiiF*, Platforma Informatică pentru Ingineria Fluidelor (PiiF)/ Concepte/ C.4. Turbopompe și ventilatoare, adrese web: <http://www.piif.ro/> și <http://b.piif.ro/>
- [2] Anton A., 2013, *Mașini hidraulice – Curs Facultatea de Inginerie a Instalațiilor, UTCB*, Platforma Informatică pentru Ingineria Fluidelor (PiiF)/ Cursuri/ Aplicații complexe în Ingineria fluidelor, web: <http://www.piif.ro/> și <http://b.piif.ro/>
- [3] Cioc D., 1983, *Hidraulică*, ediția a 2-a, Editura Didactică și Pedagogică, București
- [4] Coșoiu C. I., *Mecanica fluidelor și Mașini hidraulice – Curs Facultatea de Utilaj Tehnologic, UTCB*, Platforma Informatică pentru Ingineria Fluidelor (PiiF)/ Cursuri/ Fundamentele Ingineriei fluidelor, web: <http://www.piif.ro/> și <http://b.piif.ro/>
- [5] Desnoël L., 1991, *Mécanique des fluides. 66 exercices corrigés*, DUNOD, Paris
- [6] Eaton J. W., Bateman D., Hauberg S., Wehbring R., 2011, *GNU Octave – A high-level interactive language for numerical computations*, 3rd edition for Octave version 3.8.0, <http://www.gnu.org/software/octave/octave.pdf>
- [7] Georgescu A.-M., 2013, *Calculul coeficientului lui Darcy*, Platforma Informatică pentru Ingineria Fluidelor (PiiF)/ Aplicații interactive/ Aplicații complexe/ ID 051, web: <http://www.piif.ro/> și <http://b.piif.ro/>
- [8] Georgescu A.-M., 2013, *Concepte în PiiF*, Platforma Informatică pentru Ingineria Fluidelor (PiiF)/ Concepte/ B.1. Măsurarea mărimilor fizice asociate curgerilor și echipamentelor din Ingineria fluidelor; B.2. Curgerea staționară în conducte; B.10. Curgerea lichidelor prin orificii și ajutaje; C.1. Rețele de conducte, sisteme de transport și distribuție pentru lichide și gaze, web: <http://www.piif.ro/> și <http://b.piif.ro/>
- [9] Georgescu A.-M., 2013, *EPANET: Problema celor 3 rezervoare*, Platforma Informatică pentru Ingineria Fluidelor (PiiF)/ Aplicații interactive/ Aplicații complexe/ ID 002, web: <http://www.piif.ro/> și <http://b.piif.ro/>
- [10] Georgescu A.-M., 2013, *Hidraulica II – Curs Facultatea de Inginerie a Instalațiilor, UTCB*, Platforma Informatică pentru Ingineria Fluidelor (PiiF)/ Cursuri/ Aplicații de bază în Ingineria fluidelor, web: <http://www.piif.ro/> și <http://b.piif.ro/>

- [11] Georgescu A.-M., 2013, *Problema pompe (Problema 4.29.4)*, Platforma Informatică pentru Ingineria Fluidelor (PiiF)/ Aplicații interactive/ Aplicații complexe/ ID 082, web: <http://www.piif.ro/> și <http://b.piif.ro/>
- [12] Georgescu S.-C., 2013, *Concepte în PiiF*, Platforma Informatică pentru Ingineria Fluidelor (PiiF)/ Concepte/ B.2. Curgerea staționară în conducte; C.1. Rețele de conducte, sisteme de transport și distribuție pentru lichide și gaze; C.3. Turbine hidraulice; C.4. Turbopompe și ventilatoare, web: <http://www.piif.ro/> și <http://b.piif.ro/>
- [13] Georgescu S.-C., 2013, *Mașini hidraulice – Curs Facultatea de Energetică, UPB*, Platforma Informatică pentru Ingineria Fluidelor (PiiF)/ Cursuri/ Aplicații complexe în Ingineria fluidelor, web: <http://www.piif.ro/> și <http://b.piif.ro/>
- [14] Georgescu A.-M., Georgescu S.-C., 2013, *Hidraulica rețelelor de conducte cu EPANET*, Editura Printech, București
- [15] Georgescu A.-M., Georgescu S.-C., 2013, *Aplicații simple de Mașini hidraulice*, Platforma Informatică pentru Ingineria Fluidelor (PiiF)/ Aplicații interactive/ Aplicații simple/ ID 023, web: <http://www.piif.ro/> și <http://b.piif.ro/>
- [16] Georgescu A.-M., Georgescu S.-C., 2007, *Hidraulica rețelelor de conducte și mașini hidraulice*, Editura Printech, București
- [17] Georgescu A.-M., Georgescu S.-C., 2004, *Pagina web interactivă pentru rezolvarea problemelor simple de Mașini hidraulice*, Hidrotehnica, vol. 49, no. 1, pp. 3-9
- [18] Georgescu A.-M., Georgescu S.-C., Hașegan L. V., Coșoiu C. I., Degeratu M., Stroia L., 2013, *Standuri experimentale pentru Hidraulica instalațiilor*, Editura Orizonturi Universitare, Timișoara
- [19] Georgescu S.-C., Georgescu A.-M., Dunca G., 2005, *Stații de pompare. Încadrarea turbopompelor în sisteme hidraulice*, Editura Printech, București
- [20] Georgescu S.-C., Popa R., Petrovici T., 2005, *Metode numerice în Energetică – Îndrumar de laborator*, Partea I, Editura Printech, București
- [21] Hașegan L., Anton A., 2001, *Machines hydrauliques*, MATRIX ROM, București
- [22] Iamandi C., Petrescu V., 1978, *Mecanica fluidelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București
- [23] Iamandi C., Petrescu V., Damian R., Sandu L., Anton A., 2002, *Hidraulica instalațiilor. Calculul sistemelor hidraulice*, vol. II, Editura Tehnică, București, 320p.
- [24] Iamandi C., Petrescu V., Damian R., Sandu L., Anton A., 1994, *Hidraulica instalațiilor*, vol. 1, Editura Tehnică, București

-
- [25] Iamandi C., Petrescu V., Sandu L., Damian R., Anton A., Degeratu M., 1985, *Hidraulica instalațiilor. Elemente de calcul și aplicații*, Editura Tehnică, București
- [26] Ionescu D., 2005, *Introducere în mecanica fluidelor*, ediția a 2-a, Editura Tehnică, București
- [27] Ionescu D., Matei P., Ancușa V., Todicescu A., Buculei M., 1983, *Mecanica fluidelor și Mașini hidraulice*, Editura Didactică și Pedagogică, București
- [28] Isbășoiu E. C., Georgescu S.-C., 1995, *Mecanica Fluidelor*, Editura Tehnică, București
- [29] Krivchenko G. I., 1986, *Hydraulic machines. Turbines and pumps*, MIR Publishers, Moscow
- [30] Nekrasov B., Fabrikant N., Kochergin A., 1974, *Problems in Hydraulics*, MIR Publishers, Moscow
- [31] Pavel D., 1964, *Stații de pompare și rețele de transport hidraulice*, Editura Didactică și Pedagogică, București
- [32] Press W., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B., 1992, *Numerical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Oakleigh Australia
- [33] Tatu G., 1993, *Mașini hidraulice. Note de curs*, vol. I, Reprografia Institutului de Construcții București
- [34] Tatu G., 1998, *Hydraulique II. Cours et applications*, Reprografia Universității Tehnice de Construcții București
- [35] Vintilă Șt., Cruceru T., Onciu L., 1995, *Instalații sanitare și de gaze*, Editura Didactică și Pedagogică, București
- [36] Viollet P.-L., Benhamadouche S., Benoit M., Chabard J.-P., Violeau D., 2010, *Problèmes résolus de Mécanique des fluides avec rappels de cours*, Presses des Ponts, Paris
- [37] Yang W. Y., Cao W., Chung T.-S., Morris J., 2005, *Applied Numerical Methods using MATLAB®*, Wiley-Interscience, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey.

ISBN 978-604-23-0148-4



9 786062 301484